

位置決め制御システムに対する ILQ 最適サーボ系設計

2006MI156 瀬古 一生

指導教員：陳 幹

1 はじめに

最適レギュレータ (LQ) 設計法は、低感度特性やロバスト安定性など実用上優れた特性を備えている。しかし、LQ 設計法は評価関数の重みが閉ループ応答などの工学的な仕様と明確に結びついていないためその選定が難しい。そこで LQ 制御の逆問題の結果を利用した ILQ (InverseLinearQuadratic) 設計法が存在する。ILQ の特徴は、LQ のもつ有用性を維持しつつ調整の難しさが改善される [1]。設計パラメータと時定数を指定することにより、それが重みに関して最適であるような状態フィードバックを求める。Ball & Beam の制御に対してこの ILQ 最適サーボ系設計法を用いて設計を試みる。

2 制御対象

制御対象は、DC モーターを駆動し出力軸の回転角度を変えることによって Beam の角度を制御し、Ball の位置決めを行うシステムである。DC モーターを駆動するための電流を入力として出力軸の回転角度を変えるサーボプラント (SRV02) の部分と、出力軸の回転角度を入力として Beam の角度を制御して Ball の位置を決める Ball & Beam (BB01) の 2 つの部分に分けられる。

$m[kg]$ は Ball の質量、 $g[m/s^2]$ は重力加速度、 $r[m]$ は Ball の半径、 $r_{arm}[m]$ は Lever arm offset、 $L[m]$ は Beam の長さ、 $J[kgm^2]$ は固体球の慣性モーメント、 η_g はギアボックス効率、 η_m はモータ効率、 K_g はシステムギア比、 $K_t[Nm]$ はモータトルク定数、 $J_l[kgm^2]$ は負荷の慣性モーメント、 $J_m[kgm^2]$ はモータシャフトの慣性モーメント、 $J_{eq}[kgm^2]$ は等価慣性モーメント、 $B_{eq}[Nm/(rad/s)]$ は等価粘性摩擦である。BB01 の運動方程式を近似的に線形化すると、

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = \frac{mg\theta_l(t)r_{arm}r^2}{L(mr^2 + J)} \quad (1)$$

となる。また、SRV02 の数学モデルは、

$$\ddot{\theta}_l(t) = -\frac{B_{eq}}{J_{eq}}\dot{\theta}_l(t) + \frac{\eta_g\eta_m K_g K_t}{J_{eq}}I_m(t) \quad (2)$$

である。ここで、状態変数を

$$x(t) = \begin{bmatrix} x & \dot{x} & \theta & \dot{\theta} \end{bmatrix}^T \quad (3)$$

のように選ぶ。以上より式 (1)、(2)、(3) を利用して状態空間表現で表し、設計を行った。

3 最適サーボ系の基本構造

出力 y をステップ目標値 r に追従させる最適サーボ系の設計問題を考察する。ただし、この系は原点に零点をもたない、すなわち、次の行列は正則とする。

$$\Gamma = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

最適サーボ系は状態フィードバックと積分補償器で構成され、状態フィードバックゲイン K_F と積分ゲイン K_I は、制御対象に積分器を付加した拡大系

$$\dot{x}_e = A_e x_e + B_e u_e \quad (5)$$

$$A_e = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, B_e = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, C_e = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

に対して二次形式評価関数

$$J = \int_0^\infty (x_e^T Q x_e + u_e^T R u_e) dt \quad (7)$$

$$Q = C_e^T C_e, R > 0 \quad (8)$$

を最小化する最適レギュレータ問題の解

$$u_e = -[K_F \ K_I]x_e := -K_e x_e \quad (9)$$

として得られ、いわゆる最適サーボ系となる。

4 ILQ 基本構造

状態フィードバック (9) が最適制御であるための必要十分条件は、ゲイン K_e に対して適当な正則行列 V と $\Sigma = \text{diag}\{\sigma_1 \cdots \sigma_m\} > 0$ および適当な実行列 K_F^0 、 K_I^0 が存在して

$$K_e = V^{-1}\Sigma V[K_F^0 \ K_I^0] \quad (10)$$

$$K_F^0 B = I \quad (11)$$

が成立することである。そして、 K_F^0 、 K_I^0 から定まる次の基本フィードバックゲイン K を導入する。

$$K = K_F^0 A + K_I^0 C \quad (12)$$

これにより以下のパラメータ行列 V 、 Σ 、 K を用いたゲイン K_F 、 K_I の式 (13) 得られる。

$$[K_F \ K_I] = V^{-1}\Sigma V[K \ I]\Gamma^{-1} \quad (13)$$

この結果から ILQ サーボ系設計法では最適制御則 K_e が最適となるようにパラメータ V 、 Σ 、 K を決定することである。

5 制御系パラメータの設定

設計方針については、目的とする制御則 K_e が最適になるようにパラメータ V 、 K 、 Σ を次の方針で決定する。

1. V は設計簡単化のため単位行列を選ぶ。
2. 図 1 に示す伝達関数行列 G_{yr}^∞ が希望の伝達関数行列になるようにゲイン K を決める。

3. $\Sigma = \sigma I$ と限定して、 V 、 K に対して、制御則 K_e が最適となる条件を満たす σ_{min} を求め、 $\sigma > \sigma_{min}$ なる範囲内で各 σ の値を選ぶ [2]。 σ は K_F 、 K_I の大きさを調整する役割をもつことからゲイン調整パラメータと呼ばれている。

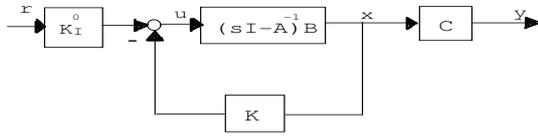


図 1 G_{yr}^∞ は r から y までの閉ループ伝達関数

6 ゲイン K の計算方法

$G_{yr}^\infty(s)$ が希望の伝達関数行列

$$G_{yr}^\infty(s) = \text{diag}\left\{\frac{\phi_i(0)}{\phi_i(s)}\right\} \quad (14)$$

となるための必要十分条件は、次の行列 D が正則となることである。

$$D = \begin{pmatrix} c_1 A^{d_1-1} B \\ c_2 A^{d_2-1} B \\ \vdots \\ c_m A^{d_m-1} B \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$d_i := \min\{k : C_i A^{k-1} B \neq 0\} \quad (1 \leq i \leq m) \quad (16)$$

また、そのときのゲイン K は、

$$K = D^{-1} N_\phi, \quad N_\phi = \begin{pmatrix} c_1 \phi_1(A) \\ \vdots \\ c_m \phi_m(A) \end{pmatrix} \quad (17)$$

で得られる [3]。ただし、 $\phi(s)$ は、式 (16) で定義される制御対象の相対次数 d_i と同じ次数を持つ任意の安定多項式である。

7 制御対象に対する ILQ サーボ系設計法

ここでは制御対象の目標値応答を ILQ サーボ系設計法を用いて制御系を構成し、シミュレーションと実験の結果を示す。まず制御対象の相対次数を計算する。制御対象 (1 入出力系より $i = 1$) の相対次数は $d_1 = 4$ となる。よって 4 次遅れ系の伝達関数で目標値応答波形を指定できる。そこで D を計算すると、 $D = CA^{d_1-1}B = CA^3B = 69.7174$ となる。次に、指定応答である $G_{yr}^\infty(s)$ を規定する多項式 $\phi_1(s)$ を最も簡単な次の形で与えると、 $\phi_1(s) = (s - s_1)^{d_1}$ となる。ここで $s_1 = \frac{-1}{T_1}$ とすれば指定応答として、4 次遅れ系の伝達関数

$$\frac{1}{(T_1 s + 1)^4} \quad (18)$$

で与えることができる。つまり、そのときの時定数 T_1 が設計仕様となる。

8 シミュレーションと実験結果

時定数を $T_1 = 0.5$ 、 $\Sigma = 16$ として設計した時のシミュレーションと実験の結果を図 2 に示す。

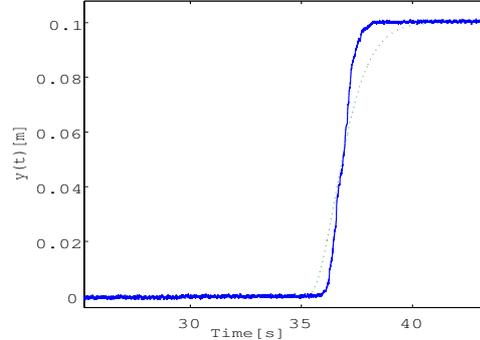


図 2 時定数 $T_1 = 0.5$ の時の指定応答 (点線:シミュレーション、実線:実験)

9 考察

Ball & Beam への実装には調整パラメータ Σ を操作量と制御量のトレードオフによって決定した。その際 Σ を大きくすると出力 y は指定した出力応答波形に漸近するが、操作量 u が一般に大きくなる。そのため、両者の妥協をはかりながら Σ の適切な値を決定しなければならない。この際、サーボ系の最適性は調整パラメータ σ をその下限値 σ_{min} よりも大きくすることで保証される。シミュレーションと実験結果には誤差がみられるが、これは数式モデルと実機モデルとの間に誤差があり、シミュレーションモデルでは考慮しなかった Beam の摩擦などの非線形項が影響していると考えられる。また、実験結果において偏差が零になるまでに時間を費やしているものがあつたが、これは積分ゲインが小さく、積分ゲインの項があまり制御に影響を与えていないためと考えられる。

10 おわりに

本設計法の主な特長として、設計パラメータと閉ループ応答との関連が明確であり、それを利用して各出力の応答波形が、操作量の大きさなどとバランスさせながら独立に指定できる。また、設計計算は、Riccati 求解計算に代わり非干渉化制御計算が主体となっているため簡単であり、演算時間も大幅に短縮される。

参考文献

- [1] 藤井隆雄、下村卓:ILQ 最適サーボ系設計法の一般化、システム制御情報学会論文誌、Vol.1、No.6、pp.194-203(1988)
- [2] 木村英紀、藤井隆雄、森武宏:ロバスト制御、コロナ社 (1994)
- [3] 古田勝久、佐野昭:基礎システム理論、コロナ社 (1991)