多項式の零点に対するSmithの定理の改良

2006MI155 関万梨子
指導教員：杉浦　洋

1　はじめに

昨年の刀根 [2] では，Weierstrass 法で，精度の良い近似解を求め Smith の定理でその精度保証を行った．

本研究では，Smith の定理を精密化し，より精度の高い精度保証を目指す．Smith の定理は，行列の固有値に関する Gershgorin の定理を基礎としている．我々は Gershgorin の定理をより精密な Brauer の定理で置き換えることにより，Smith の定理を改良した．

また，Mathematica により円板算法を構成し，数値実験を行い，新しい定理の有効性を確認した．

2　Weierstrass 法 (Durand-Kerner 法)

モニックな n 次複素多項式を，

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \qquad (a_i \in \mathbb{C}) \quad (1)$$

とし，その零点を $\zeta_i (1 \le i \le n)$ とする．

初期値 $z_i^{(0)} \simeq \zeta_i (1 \le i \le n)$ より，

$$z_i^{(m+1)} = z_i^{(m)} - \frac{P_n(z_i^{(k)})}{\displaystyle\prod_{j=1, j\neq i}^{n} (z_i^{(m)} - z_j^{(m)})} \qquad (1 \le i \le n) \quad (2)$$

で数列 $\{z_i^{(m)}\}_{m\ge 0} (1 \le i \le n)$ を生成し，$\lim_{m\to\infty} z_i^{(m)} = \zeta_i$ を期待する方法を Weierstrass 法という．

すべての零点が単純の場合は，初期値のそれぞれが，十分に零点に近ければ Weierstrass 法で各数列 $\{z_i^{(m)}\}_{m\ge 0}$ $(1 \le i \le n)$ は ζ_i に 2 次収束する．

3　Smith の定理

多項式の零点の存在範囲に関する Smith の定理について述べる [3].

Smith は，行列の固有値の存在範囲に関する Gershforin の定理を用いて，以下の定理を証明している．

代数方程式 (1) に対し，初期値を $z_1, z_2, \cdots, z_n$ としたWeierstrass 反復を，

$$z_k^+ = z_k + \delta_k, \quad \delta_k = -\frac{P_n(z)}{\displaystyle\prod_{i\neq k}(z_k - z_i)} \quad (1 \le k \le n) \qquad (3)$$

とする．

［定理 1］（Smith）

Smith の円板を，

$$G_k = \{z : |z - z_k^+| \le r_k\}\ , \quad r_k = \sum_{i\neq k} |\delta_i|\ , \qquad (4)$$

$$\hat{G}_k = \{z : |z - z_k^+| \le \hat{r}_k\}\ , \quad \hat{r}_k = (n-1)|\delta_k| \qquad (5)$$

と定義すると，

$$\zeta_i \in \bigcup_{k=1}^{n} G_k = G\ , \qquad (6)$$

$$\zeta_i \in \bigcup_{k=1}^{n} \hat{G}_k = \hat{G} \quad (1 \le i \le n) \qquad (7)$$

となる．G の連結部分 D が m 個の円板から生成されるなら，D はちょうど m 個の解を含む.//

4　Smith の改良

Brauer[1] は Gershgorin の定理の精密化を行った．我々は，それを用いて Smith の定理の改良をし，次の結果を得た．

［定理 2］(Smith-Brauer)

Smith の定理の r_k,$\hat{r}_k$,$(1 \le k \le n)$ を用いて，Brauer の楕形を

$$K_{kl} = \{z : |z - z_k^+||z - z_l^+| \le r_k r_l\}\ , \qquad (8)$$

$$\hat{K}_{kl} = \{z : |z - z_k^+||z - z_l^+| \le \hat{r}_k \hat{r}_l\} \qquad (9)$$

と定義すると，任意の ζ_i ,$(1 \le i \le n)$ について

$$\zeta_i \in \bigcup_{1\le k<l\le n} K_{kl} = K\ , \qquad (10)$$

$$\zeta_i \in \bigcup_{1\le k<l\le n} \hat{K}_{kl} = \hat{K} \qquad (11)$$

である．//

任意の $1 \le k < l \le n$ について，

$$K_{kl} \subset G_k \cup G_l\ , \qquad (12)$$

$$\hat{K}_{kl} \subset \hat{G}_k \cup \hat{G}_l\ . \qquad (13)$$

ゆえに，

$$K \subset G\ , \quad \hat{K} \subset \hat{G} \qquad (14)$$

が成立する．したがって，Smith-Brauer の方が強い制約を与えており，良い精度保証が得られる．

5　Brauer の楕形を含む円板の生成

[**定理** 3] (Brauer **楕形包含円板**)

α,β を焦点とする Cassini の楕形を

$$C : |z - \alpha||z - \beta| \le r^2 \qquad (15)$$

とする．

$r \ge |\alpha - \beta|/2$ のとき，C の連結成分はただ 1 つである．

$r < |\alpha - \beta|/2$ のとき，C は２つの連結成分から成り，それぞれを含む最小の円板 $\alpha \in D_\alpha$,$\beta \in D_\beta$ は,

$$D_\alpha = \langle \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\beta-\alpha}{4}(\sqrt{1+\rho}+\sqrt{1-\rho}) ; \frac{\rho|\beta-\alpha|}{2(\sqrt{1+\rho}+\sqrt{1-\rho})} \rangle \ , \tag{16}$$

$$D_\beta = \langle \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\beta-\alpha}{4}(\sqrt{1+\rho}+\sqrt{1-\rho}) ; \frac{\rho|\beta-\alpha|}{2(\sqrt{1+\rho}+\sqrt{1-\rho})} \rangle \tag{17}$$

である．//

6 近接零点の分離能

Gershgorin 円板 $G_1 = \langle c_1; r_1 \rangle$, $G_2 = \langle c_2; r_2 \rangle$ が分離する条件は,

$$r_1 + r_2 < |c_1 - c_2| \tag{18}$$

である．これは,

$$\frac{r_1 + r_2}{2} < \frac{|c_1 - c_2|}{2} \tag{19}$$

と書きかえることができる．

また，Brauer の橙形の分離条件は,

$$r_1 \cdot r_2 < \frac{|c_1 - c_2|^2}{4} \tag{20}$$

である．同様に書きかえると

$$\sqrt{r_1 \cdot r_2} < \frac{|c_1 - c_2|}{2} \tag{21}$$

となる．書き換えた (19) と (21) を比較してみると，左辺は r_1, r_2 の相加・相乗平均である．

つまり，Gershgorin 円板と Brauer の橙形の分離条件が異なり，半径の差が大きければ，Brauer の橙形は分離しやすい．

したがって，Gershgorin 円板が分離出来なかった近接根を，相加・相乗平均の不等式より場合によっては，Brauer の橙形が分離し，単根であるということが示される (図 4.1).

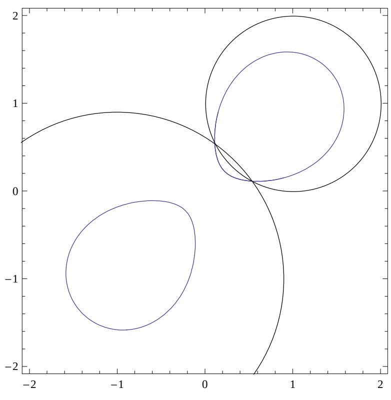

図 4.1 $G_1 = \langle 1+i, 1 \rangle$, $G_2 = \langle -1-i, 1.9 \rangle$

7 Mathematica による数値実験

実験に使用したモニックな n 次複素多項式は

$$f(z) = z^4 - 1 = 0 \tag{22}$$

である．この多項式の 0 点は，$-i, -1, 1, i$ である．

Mathematica を用いて，適当な初期値から Weierstrass 反復を行い，近似 0 点を得た．

次に，Gershgorin 円板を作成し，その Gershgorin の中心と半径から Brauer 橙形を作成する．橙形の一番中心から距離の長い Brauer 橙形を利用して，Brauer 橙形の包含円板を作成する．

最終的に，Gershgorin 円板と Brauer 橙形の包含円板を比較した際に，より良い精度が得られるかを検証した．

Gershgorin 円板と Brauer 橙形の包含円板の半径を比較して比率を計算した結果は，以下の表のとおりである．

表 1 Gershgorin 円板と Brauer 橙形包含円板の縮小の比率

比率	
円 1	36.5373
円 2	36.6917
円 3	36.6915
円 4	36.5107

8 おわりに

Brauer の定理を使って Smith の定理を改良し，Smith-Brauer の定理を獲得したことが，本研究の重要な成果の１つである．

また，Gershgorin 円板の分離条件と Brauer の分離条件が相加相乗平均と酷似していることを発見したことも成果の一つである．これにより，Gershgorin 円板の半径の差が大きいほど，Brauer 橙形の分離度が高くなることが示された．

最後に，Smith-Brauer の定理を用い多項式零点の精度保証の数値実験を行った結果，Gerhgorin 円板と比較すると，約 40 倍近い円板の縮小が見られた．

したがって，Smith-Brauer の有効性を検証することができた．

参考文献

[1] Alfred Brauer: Limits for the characteristic roots of a matrix. II. Duke Math. J. Vol. 14, No. 1 (1947), pp. 21-26.

[2] 刀根佑介: 多項式の全複素零点に対する精度保証付き同時円板反復解法, 南山大学数理情報学部数理科学科卒業論文，2009.

[3] 山本哲郎：『数値解析入門 (増訂版)』．サイエンス社，2005.