最良近似式のためのRemesの第2算法

2006MI143 佐橋加奈子

指導教員：杉浦洋

1　はじめに

与えられた区間 $[a,b]$ における関数 $f(x)$ を計算するために，$f(x)$ の有理近似が使われる．次数を固定したとき，区間 $[a,b]$ における絶対誤差の最大値が最小となる有理近似を最良近似という．我々は，Remes の第 2 算法に基づき，与えられた被近似関数の最良近似式を求めるプログラムを，Mathematica 上で作成した．

2　最良近似とミニマックス近似におけるチェビシェフの定理

区間 $[a,b]$ において，連続関数 $f(x)$ を次数 (m,k) の既約な有理式

$$R_{mk}(x) = \frac{P_m(x)}{Q_k(x)} = \frac{\sum_{j=0}^{m} a_j x^j}{\sum_{j=0}^{k} b_j x^j} \tag{1}$$

で近似する問題を考える．誤差の指標を区間における最大絶対誤差

$$r_{mk} = \max_{a \le x \le b} |f(x) - R_{mk}(x)| \tag{2}$$

とする．　次数 (m,k) を固定したとき，最大絶対誤差 r_{mk} を最小にする有理関数近似 $R_{mk}(x)$ をミニマックス近似，あるいは最良近似という．

定理１　チェビシェフの定理

有限区間 $[a,b]$ における連続関数 $f(x)$ の (m,k) 次最良近似は存在して一意である．その最良近似式が実質 $(m-\nu, k-\mu)$ 次であったとして

$$R^*_{mk}(x) = \frac{\sum_{j=0}^{m-\nu} a_{j+\nu} x^j}{\sum_{j=0}^{k-\mu} b_{j+\mu} x^j} = \frac{P^*_m(x)}{Q^*_k(x)} \tag{3}$$

$$0 \le \mu \le k \qquad 0 \le \nu \le m \qquad a_m, b_k \ne 0$$

また，その最大絶対誤差を r^*_{mk} とし，$r^*_{mk} \ne 0$ を仮定する．

このとき，区間 $[a,b]$ の点列 $\tau_1, \cdots, \tau_L$ が存在して，

(1)　$L = m + k + 2 - d$　　, d=min(μ,ν),

(2)　$\tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \cdots < \tau_L$,

(3)　$|e^*_{mk}(\tau_i)| = r^*_{mk}$　$(1 \le i \le L)$,

(4)　sign $e^*_{mk}(\tau_i)$ =-sign $e^*_{mk}(\tau_{i+1})$　$(1 \le i \le L-1)$

$$e^*_{mk} = f(x) - R^*_{mk}(x),$$

$$\mathrm{sign}x = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$$

である．//

r^*_{mk} を最良近似度という．最良近似式の誤差 $e^*_{mk}(x)$ は絶対値が r^*_{mk} で符号の交代する L 個の極値点をもつ．とくに，$k=0$ の多項式近似では $L = m+2$ である．

3　Remes の第２算法

Remes の第 2 算法は，定理 1 式 (3) の最良近似を構成するアルゴリズムである．定理 1 で $d \ne 0$ の最良近似 $R^*_{mk}(x)$ はより低い次数設定で得られるので，$d = 0$ を仮定する．すなわち，$R^*_{mk}(x)$ は $m+k+2$ 個の符号の交代する極値点を持つとする．また，一般性を失わず，$b_0 = 1$ に固定する．

入力：区間 $[a,b]$．被近似関数 $f(x)$．次数 (m,k).

出力：(m,k) 次最良近似 $R^*_{mk}(x)$.

Remes の第 2 算法は次の 3 つのステップから成る．以下，$N = m+k$ とする．

ステップ１：初期近似式の構成

初期近似式

$$R^{(0)}_{mk}(x) = \frac{\sum_{j=0}^{m} a^{(0)}_j x^j}{1 + \sum_{j=1}^{k} b^{(0)}_j x^j} \tag{4}$$

を，誤差 $e^{(0)}_{mk}(x) = f(x) - R^{(0)}_{mk}(x)$ が $N+1$ 個の極値点 $a \le x^{(0)}_0 < x^{(0)}_1 < \cdots < x^{(0)}_{N+1} \le b$ を持ち，その上で，符号交代するように構成する．

ステップ２：近似式の改良

$N+2$ 個の未知数 $a_0, \cdots, a_m, b_1, \cdots, b_k, E$ に関する非線型方程式

$$f(x^{(0)}_i) - \frac{\sum_{j=0}^{m} a_j (x^{(0)}_i)^j}{1 + \sum_{j=1}^{k} b_j (x^{(0)}_i)^j} = (-1)^i E \quad ,0 \le i \le N+1 \tag{5}$$

を初期値 $a^{(0)}_0, ..., a^{(0)}_m$　,　$b^{(0)}_1, ..., b^{(0)}_k$　,　$e^{(0)}_{mk}(x^{(0)}_0)$ として適当な反復法で解き，新しい近似式を

$$R_{mk}(x) = \frac{\sum_{j=0}^{m} a_j x^j}{1 + \sum_{j=1}^{k} b_j x^j} \tag{6}$$

とする．
ステップ３：誤差の極値点と極値の計算
誤差 $e_{mk}(x) = f(x) - R_{mk}(x)$ の符号が交代する $N+1$ 個の極値点 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_{N+1} \le b$ を求める．

$$e_{\max} = \max_{0\le i\le N+1} |e_{mk}(x)|, e_{\min} = \max_{0\le i\le N+1} |e_{mk}(x)|$$

を計算し，$e_{\max} - e_{\min}$が十分小さければ, $R_{mk}(x)$ を解とする．そうでなければ，$R^{(0)}_{mk}(x) = R_{mk}(x)$ としてステップ２の改良を続ける．

4　プログラム

Remes の第２算法に基づき，最良近似多項式を求めるプログラムを作成した．３章で述べた Remes の第二算法で具体的でないのは，誤差関数について，符号交代する長さ L の極値の列を構成するアルゴリズムである．この列は誤差関数の最大絶対値を含まねばならない．

この章では，区間 $[a,b]$ 上の解析的な関数 $f(x)$ が，有限個の極値点 $(\eta)_{i=1}^{M}$ を持ち，しかも符号交代する長さ L の極値の列を持つことを仮定する．その上で，この $f(x)$ について以下の条件 P を満たす列 $(\eta_i)_{i=1}^{L}$ を構成する．
＜条件 P ＞
(イ)　$\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_{n+2}$
(ロ)　Sign $f(\xi_{i+1})$ =-Sign $f(\xi_i)(1 \le i \le n+1)$
(ハ)　$\max_{i\le i\le n+2} |f(\xi_i)| = \max_{1\le i\le M} |f(\eta_i)|$
(ニ)　上記３条件を満たす点列の中で $\min |f(\xi_i)|$ が最大.

アルゴリズムは２つの段階からなる．まず第１段では，区間 $[a,b]$ における関数 $f(x)$ の極値点全体からなる集合 X を求める．第２段で上記４条件を満たす極値点列を構成する．

＜１. 極値点集合の構成＞

区間内点 $x \in (a,b)$ が定数でない解析関数 $f(x)$ の極値点である条件は，$f'(x) = 0$ かつ x で $f(x)$ が下に凸あるいは上に凸であることである．次の命題は，(a,b) の部分開区間が極値点を含むための十分条件を示す．

［命題１］f は開区間 (a,b) で解析的とする．区間上の三点 $u < v < w$ が

$$(f(v) - f(u))(f(w) - f(v)) < 0 \cdots (A)$$

を満たすとき，開区間 (u,w) は f の極値点を含む．//

この命題の条件（A) を満たす三点 $u < v < w$ が与えられれば，以下のアルゴリズムで任意の精度で区間 $[u,w]$ 内の極値点を求めることができる．

［アルゴリズム１］許容誤差 $\epsilon > 0$ での極値点の計算
1.　区間 $[u,v], [v,w]$ の長い方の二等分点 r をとる．
ここでは $[u,v]$ の方が長いとし，$r = (u+v)/2$ とする．
2.　条件より，
$(f(r) - f(u))(f(v) - f(r)) < 0 \cdots (1)$
$(f(v) - f(r))(f(w) - f(v)) < 0 \cdots (2)$
のいずれかが成立する．
(1) が成立すれば，u, v, w を u, r, v で置き換える．
(2) が成立すれば，u, v, w を r, v, w で置き換える．
いずれにせよ，命題 A より新しい区間 $[u,w]$ は f' の零点も含む．
3.　2 を区間幅 $w - u \le 2\epsilon$となるまで繰り返し,$\xi = (u+w)/2$ を解とする．//

命題１とアルゴリズム１より区間 $[a,b]$ 内の関数 $f(x)$ の極値点をすべて求める，次のアルゴリズムが得られる．

［アルゴリズム２］区間 $[a,b]$ 内の $f(x)$ の極値点のリスト Y を作成.
(1)　十分大きな N をとり $[a,b]$ 上の Chebyshev 点

$$x_i = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} \cos\frac{\pi i}{N} (a \le i \le N) \tag{7}$$

をとる．$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ である．
(2)　リスト Y に端点 a, b を登録.
(3)　$1 \le i \le N$ で, $(f(x_i) - f(x_{i-1}))(f(x_{i+1}) - f(x_i)) < 0$ なら命題１より区間 $i = [x_{i-1}, x_{i+1}]$ に極値点が存在する．これをアルゴリズム１で求めて Y に登録. //

＜２. L 個の極値点の選抜＞

次に，アルゴリズム２で生成したリスト Y から条件 P を満たす点列 $\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_L$ を選び出す.
［アルゴリズム３］点列 $(\xi)_{i=1}^{L}$ の選出
(1)　$m = L$ とする．
(2)　Y から極値の絶対値が大きい順に m 個の極値点を選び出し，その集合を Z とする．
(3)　集合 Z の要素を小さい順に並べ，その極値が $L-1$ 回以上の符号交代をしていれば，(4) へ．そうでなければ，$m = m+1$ として (2) へ.
(4)　Z の要素を小さい順に並べると，それらは極値の符号により L 個または $L+1$ 個のクラスタに分かれる．それぞれのクラスタから，極値の絶対値が最大の極値点を一つずつ選出してリスト X とする．X の要素は小さい順に並べておく．もし，$|X| = L$ なら X が求めるリストである．$|X| = L+1$ なら，X の最初の要素と最後の要素のうち，絶対値の小さいほうを取り除いて新たにそれを X とする．//

5　おわりに

今回の研究によって，Remes の第２算法に基づいて最良近似多項式を求めるプログラムを作成することができた．特に，符号交代する極値の列を安定に求めるアルゴリズムを開発し，Remes の第２算法に組み込んだ．それにより，基本的な初等関数である指数関数，sine 関数，cosine 関数の５次と１０次の最良近似多項式を作成した．いずれの場合も我々のプログラムは正常に終了し，最良近似多項式を求めることに成功した．この結果については，口頭発表で詳しく述べる．

最良近似有理式を求めるプログラムの開発が次の目標である．

参考文献

[1] Anthony Ralston and Philip Rabinowitz: A First Course in Numerical Analysis Second Edition Dover Publications, New York, 2001