２次元適応型積分則
三角形分割の戦略. ２

2006MI119 西田絵里奈
指導教員：杉浦洋

1　はじめに

本研究では，２次元三角領域上の定積分を近似する適応型数値積分則の構成を行う．

２次元の一般的な領域上の積分は，適当な領域分割と変数変換により三角領域上の積分に帰着できる．この意味で三角領域上の数値積分則は基本的で重要である．

適応型積分則とは，要求精度にしたがって三角領域を小三角領域に分割し，各小三角領域に同じ基本公式を用いる計算法である．分割が細かくなればなるほど精度はよくなる．その際，積分誤差の小さい部分は粗く分割し，積分誤差の大きい部分は細かく分割することによって，一様均等な分割法と比べて，より少ない分割数で同じ精度が達成できる．

分割法については，牧 [2] では，小三角形領域を最長辺の中点と頂点を結ぶ線分で分割する方法を用いた．また，古田 [3] によれば，分割法としては，被積分関数の変化が激しい方向に沿った辺を分割する方法がさらに効率的である．

今回は彼らの方法を参考に，より効率的な積分則の構成を目指した．

2　数値積分の設計

xy-平面上の 3 点 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を頂点とする，三角領域を $D = D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ と書く．

基本三角形領域 $\Delta = D((0,0),(1,0),(0,1))$ の n 個の標本点 $\boldsymbol{\pi}_1 = (\xi_1, \eta_1), \boldsymbol{\pi}_2 = (\xi_2, \eta_2), ..., \boldsymbol{\pi}_n = (\xi_n, \eta_n) \in \Delta$ と重み $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$ による積分公式を

$$I_n f = \sum_{l=1}^{n} \rho_l f(\boldsymbol{\pi}_l)$$

と書く．

Δ から一般の三角領域 D へのアフィン変換 $\boldsymbol{p} = \varphi(\boldsymbol{q})$ による変数変換で

$$\iint_D f(\boldsymbol{p}) dxdy = 2S \iint_\Delta f(\varphi(\boldsymbol{q})) dtdu.$$

この右辺に積分則 I_n を用いて D 上の積分公式

$$I_n(D)f = 2S \sum_{i=1}^{n} \rho_i f(\varphi(\xi_i, \eta_i)) \cong Q(D)f \qquad (1)$$

を得る．ここで，S は D の面積である

定義 2.1　任意の s 次式 f で $I_n f = Qf$，かつ $I_n f \neq Qf$ となる $s+1$ 次式 f が存在するとき，積分公式 I_n は次数 s であると言う．

定理 1　積分則 (1) の積分公式 $I_n(D)$ が s 次だとする．被積分関数 f は $s+1$ 回連続微分可能とし，

$$M_D = \max_{p \in D} \sum_{k=0}^{s+1} \mid \frac{f^{(k,s+1-k)}(p)}{k!(s+1-k)!} \mid$$

とする．三角領域 D を含む最小の円の半径を r とする．このとき，

$$\mid Q(D)f - I_n(D)f \mid \leq (2\|I_n\|_\Delta + 1) M_D S r^{s+1}.$$

ここで，$\|\cdot\|_\Delta$ は領域 Δ 上の一様ノルムである．//

積分誤差は D の面積 S と半径 r が小さいほど小さくなる．

3　適応型積分則の基本アルゴリズム

ϵ を許容誤差とする適応型積分 $\tilde{Q}(D, \epsilon)$ は次のような再帰関数で表現できる．

$$\tilde{Q}(D,\epsilon)f = \begin{cases} I_n(D)f & (E_n(D)f \leq \epsilon) \\ \tilde{Q}(D_1, \frac{\epsilon}{2}) + \tilde{Q}(D_2, \frac{\epsilon}{2}) & (E_n(D)f > \epsilon) \end{cases}$$

$E_n(D)$ は $I_n(D)$ の誤差評価式である．ここでは，I_m を I_n の低次埋め込み公式とし，$E_n(D)f = |I_n(D)f - I_m(D)f|$ とした．

このアルゴリズムでは，与えられた許容誤差 $\epsilon > 0$ に対し真の積分値 $Q(D)f$ の近似積分 $\tilde{Q}(D)f$ を

$$|\tilde{Q}(D)f - Q(D)f| \leq \epsilon$$

を満たすように計算する．もし，

$$|\tilde{Q}(D)f - Q(D)f| > \epsilon$$

なら，領域 D をその頂点と重心 g を通る直線で小三角形領域 D_0, D_1 に２分し（図１）, それぞれに同じ積分則 (1) を用いる．

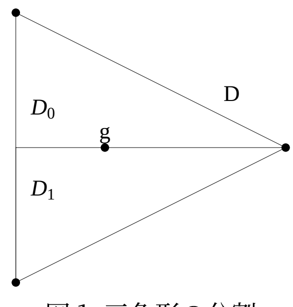

図１:三角形の分割

この再帰的な操作を繰り返し，すべての小領域で割り当てられた許容誤差を満たした時点で近似積分が完了する．

分割は，辺の中点と重心を結ぶ直線による面積等分割を用いる．選ぶ辺により, ３つの分割方向が考えられ，効率的な数値積分の構成には分割方向の決定が重要である．

4　適応型積分則における分割方法の決定法

4.1　牧の分割方法とその欠点

牧 [2] では，誤差の定理 1 から，領域 D を含む最小の円の半径を小さくするために三角形の最長辺を 2 等分した．この方法では，被積分関数の情報が反映せず，理想的な分割に比べ，分割数が増えてしまうと思われる．

4.2　古田の方法とその欠点

古田 [3] の積分公式は，被積分関数の変化が激しい方向に沿った辺を分割する．被積分関数が激しく変化する方向を検出するために，3 階差分を採用している．

牧の方法も，古田の方法も，今回の我々の方法とは違った基本積分則を用いている．我々は，条件を合わせるために牧のアルゴリズムと古田のアルゴリズムを我々と同じ基本積分則を用いて実現し比較した．

4.2　我々の方法

我々の方法は，基本積分則

$$I_{10}f, I_7 f$$

三角領域 D 上の積分

$$Q_{10}(D)f, Q_7(D)f$$

誤差推定関数

$$E(D) = Q_7(D)f - Q_{10}(D)f$$

とし，分割後の三角領域 D を $D = D_1 \cup D_2$，$D_1 \cap D_2 = \phi$ の 2 つの領域に分割することを考える．D_i 上の積分の推定誤差は $E(D_i)f$ である．

三角領域 $D = D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ の 3 方向の分割を考える．$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ の順列 $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ について，$\boldsymbol{u}$ と $(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})/2$ を結ぶ線上による分割を

$$D = D^{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{v}} \cup D^{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{w}}$$

と書く．$D^{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{v}}$ は $\boldsymbol{v}$ を含む小領域，$D^{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{w}}$ は $\boldsymbol{w}$ を含む小領域である．

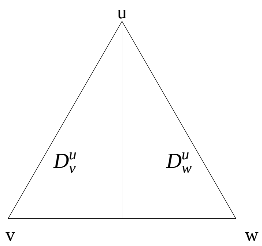

図 3 ：2 つの小領域

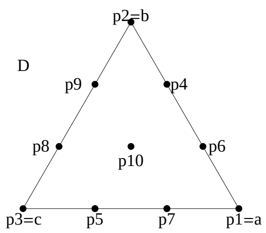

図 4 ：我々の方法による分割の標本点配置

D 上の 10 個の標本点による f の 3 次補間を

$$f_3(x,y) = \sum_{k\ge0, l\ge0, k+l\le3} \boldsymbol{a}_{kl} x^k y^l \cong f(x,y)$$

とする．分割後の推定誤差は，

$$E(D^{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{v}})f \cong E(D^{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{v}})f_3, E(D^{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{w}})f \cong E(D^{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{w}})f_3$$

で近似することができる．これを用いて，

$$L_{\boldsymbol{u}} = |E(D^{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{v}})f_3| + |E(D^{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{w}})f_3|$$

により，分割 $D = D^{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{v}} \cup D^{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{w}}$ の有効性を判定することができる．そこで，$L_{\boldsymbol{a}}, L_{\boldsymbol{b}}, L_{\boldsymbol{c}}$ の中で最小のものを選び，対応する分割を採用する．

領域 D 上の $Q_{10}(D)$ の標本点を $p_i (1 \le i \le 10)$ とする．これらの配置を図 4 に示す．$f_3(x,y)$ の係数 $a_{kl}(k \ge 0, l \ge 0, k+l \le 3)$ は標本値 $f_i = f(p_i)(1 \le i \le 10)$ の線形結合である．ゆえに，$E(D^{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{v}})f_3$ も $f_i(1 \le i \le 10)$ の線形結合となる．

5　数値実験結果

二等辺三角領域 $D = D((0,0),(1/2,1),(1,0))$ で 8 次式の積分の結果を記載した．許容誤差は $\epsilon = 10^{-4}$ である．

この問題では，我々の方法は最高の効率を示した．

	x^8	x^7y	x^6y^2	x^5y^3	x^4y^4
N	**90**	**278**	**542**	**478**	**383**
M	430	933	962	742	644
F	92	663	802	670	465

6　おわりに

三角領域における数値積分において，精度の低い三角領域を 2 つの小三角領域に分割することを繰り返して，求める精度の近似積分を行う適応型積分則について研究した．牧論文 [2]，古田論文 [3] を参考に今回は分割決定の方法を中心に研究を行った．牧では，分割方向は，三角形領域の形状に基づき小三角形領域を最長辺の中点と頂点を結ぶ線分で分割する方法を用い，古田では，被積分関数の変化の激しい方向に沿った辺を分割する A.Genz, R.Cools の方法も有力と考え被積分関数の偏導関数に基づく決定法を行ったが，我々は，3 次補間に基づく分割後の誤差予測による方法を提案し，Mathematica によるプログラムを作成し数値実験を行った．

我々の方法は，分割戦略としては優秀であることが分かった．しかし，誤差推定公式が原因で積分結果が許容誤差を満たさない例もあった．誤差推定公式の改良が今後の課題である．

参考文献

[1] A.Gentz,R.Cools, An Adaptive Numerical Cubature Algorithm for Simplices, ACM Transactions on Mathmatical Software, Vol.29, September 2003, P.297-308

[2] 牧哲弘, 領域の三角分割による 2 次元適応型積分則, 南山大学数理情報学部数理学科 2006 年度卒業論文, 2007

[3] 古田達也，2 次元適応型積分則 (三角形分割の戦略)，南山大学数理情報学部数理学科 2007 年度卒業論文, 2008