不完全性定理とその展開

2006MI118 成田一平
指導教員：佐々木克巳

1　はじめに

ゲーデルの定理と関わるさまざまな数学基礎論における諸結果は，さまざまな分野やその研究者，さらにはそれらを取りまく人々から注目をあびている．ゲーデルが示した結果はコンピュータの基本原理にもかかわっており,「機械にできること」と「人間にしかできないこと」を再考する１つの原点ということができ，このことに興味をもった．

本研究では，田中 [1] にしたがって，ペアノによる公理体系 PA を導入し，表現可能性の解釈から不完全性定理を示す．この研究は田中 [1] で省略されている証明を補いながら進め，卒業論文では補った証明をまとめた．

2　計算可能性

不完全性定理の主張を正確に述べるためには，計算論における計算可能性の概念が必要である．ここでは不完全性定理のために必要な計算論の基礎事項を，現代のコンピュータの視点も交えながら示す．

2.1　計算可能関数

まず，計算可能関数とは

> 有限的に記述される手順（アルゴリズム）が存在し，その手順に従えば関数から得られるどんな関数値も機械的に有限時間内に求めることができる関数のこと

である．つまり関数が計算可能であるとは「プログラムが存在すること」である．また，k 変数述語とは

> 与えられた k 個の値に対して「成り立つ／成り立たない」を対応させるもの

である．さらに，k 変数述語 P に対して

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & (P(\vec{x})\text{ が成り立つとき}) \\ 0 & (P(\vec{x})\text{ が成り立たないとき}) \end{cases}$$

となる k 変数関数 f を，述語 P の特性関数と呼ぶ（ただし $\vec{x}$ は $x_1, x_2, \cdots, x_k$ を表す）．そして特性関数が計算可能関数である述語を，計算可能述語と呼ぶ．

つぎに，計算可能の概念において最も基本的で重要な性質を紹介する．

定理 2.1.1　関数 f に対して,「再帰的」と「計算可能」は同等である．

3　ペアノ算術

ここでは，ペアノ算術を導入する．不完全性定理の議論に用いられるペアノ算術 PA の固有の公理を示す．PA は，１階述語論理の公理系に，この PA 固有の公理を加えることによって定める．

後者関数に関する公理

$\forall x \neg(\mathrm{S}(x) = 0)$

$\forall x \forall y \Big((\mathrm{S}(x) = \mathrm{S}(y)) \leftrightarrow (x = y) \Big)$

足し算に関する公理　(足し算の再帰的な公理)

$\forall x (x + 0 = x)$

$\forall x \forall y (x + \mathrm{S}(y) = \mathrm{S}(x + y))$

かけ算に関する公理　(かけ算の再帰的な公理)

$\forall x (x \cdot 0 = 0)$

$\forall x \forall y (x \cdot \mathrm{S}(y) = (x \cdot y) + x)$

不等号に関する公理　(不等号の再帰的な公理)

$\forall x \neg(x < 0)$

$\forall x \forall y \Big((x < \mathrm{S}(y) \leftrightarrow ((x < y) \vee (x = y)) \Big)$

帰納法の公理

$\forall \vec{y} \Big(\Big(\varphi(0, \vec{y}) \wedge \forall x (\varphi(x, \vec{y}) \to \varphi(\mathrm{S}(x), \vec{y})) \Big) \to \forall x \varphi(x, \vec{y}) \Big)$

4　第一不完全性定理

ここでは，ゲーデルの第一不完全性定理を示す．そこで，ゲーデル数，証明可能性述語および対角化定理を使って「この文は証明できない」という文をつくることで，第一不完全性定理を証明する．

4.1　証明可能性述語

以下では，この先に必要となるさまざまな定義を示す．

まず,「完全」であることの定義を示す．

定義 4.1.1　理論 T がつぎの条件を満たすとき，T は完全であるという．

任意の文 φ について $T \vdash \varphi$ か $T \vdash \neg\varphi$ のどちらかは成り立つ．つまり，どんな命題も T で証明か反証ができる．

つぎに，不完全性定理の証明に必要となる，ゲーデル数を導入する．ゲーデル数とは形式体系の「項」,「論理式」,「証明」などを自然数にコード化した数である．

α が項や論理式や証明のときに α に割り当てられる自然数のことを α のゲーデル数と呼び，それを $\ulcorner\alpha\urcorner$ と表記する．

さらに，以下では「矛盾する」,「ω 矛盾する」ことの定義を示す．

定義 4.1.2　つぎの (1)，(2) を同時に満たす論理式 φ が存在するとき理論 T は矛盾するといい，そのような φ が存在しないとき T は無矛盾であるという．

(1) $T \vdash \varphi$　(2) $T \vdash \neg\varphi$

定義 4.1.3　つぎの (1), (2) を同時に満たす論理式 $\varphi(x)$ が存在するとき理論 T は ω 矛盾するといい，そのような $\varphi(x)$ が存在しないときは ω 無矛盾であるという．

(1)$T \vdash \exists x \varphi(x)$　(2) すべての自然数 n に対して $T \vdash \neg\varphi(\overline{n})$

定理 4.1.4（対角化定理）$\varphi(x)$ が x 以外の自由変数を含まない論理式ならば，つぎの条件を満たす文 ψ が存在する．

$$\mathrm{PA} \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\overline{\ulcorner\psi\urcorner})$$

4.2　ゲーデルの第一不完全性定理

まず，ゲーデル文の定義を示す．

定義 4.2.1　$\mathrm{Pr}_T(x)$ が理論 T の証明可能性述語で，文 G が

$$T \vdash G \leftrightarrow \neg\mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner G\urcorner})$$

を満たすとき，G は T のゲーデル文であるという．

つぎに，ゲーデルの第一不完全性定理の実質を述べる．

定理 4.2.2　理論 T が PA の拡大で，G が T のゲーデル文ならば，つぎが成り立つ．

(1) T が無矛盾ならば $T \nvdash G$ である．

(2) T が ω 無矛盾ならば $T \nvdash \neg G$ である．

(3) T が ω 無矛盾ならば T は不完全である．

定理 4.2.3　理論 T が PA の計算可能拡大ならば，T のゲーデル文が存在する．

以上から，ゲーデルの第一不完全性定理を示す．

定理 4.2.4（ゲーデルの第一不完全性定理）PA の ω 無矛盾な計算可能拡大は，どんなものでも不完全である．

本研究では田中 [1] で与えられていなかった証明を補い，卒業論文にまとめた．以下にその概要を示す．

証明　PA の計算可能拡大な理論を T' とおく．定理 4.1.4 より T' のゲーデル文が存在する．さらに，T' はいま ω 無矛盾でもあるので，定理 4.2.2 より T' は不完全である．

5　第二不完全性定理

ここでは第一不完全性定理を形式化することで，ゲーデルの第二不完全性定理を示す．

理論 T が無矛盾であるというのは $T \nvdash \perp$ ということであるが，これを意味する T の文 $\mathrm{Con}(T)$ をつぎのように定義する．

定義 5.1　「理論 T が無矛盾である」を表す論理式は $\neg\mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\perp\urcorner})$ であり，これを $\mathrm{Con}(T)$ と表す．

ここで，つぎの (**D1**)ー(**D3**) からなる導出可能性条件を導入する．これらは PA において成り立つ．

定義 5.2（導出可能性条件）

(**D1**)$T \vdash \varphi$ ならば $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})$

(**D2**)$T \vdash \Big(\mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}) \wedge \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi \to \psi\urcorner})\Big) \to \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\psi\urcorner})$

(**D3**)$T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}) \to \mathrm{Pr}_T\Big(\overline{\ulcorner\mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})\urcorner}\Big)$

導出可能性条件をつかって，つぎの補題を紹介する．

補題 5.3　理論 T が PA の RE 拡大ならば，つぎが成り立つ．

(1) $T \vdash \varphi \to \psi$ ならば $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}) \to \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\psi\urcorner})$

(2) $T \vdash \Big(\mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}) \wedge \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\psi\urcorner})\Big) \to \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi \wedge \psi\urcorner})$

そして，ゲーデルの第二不完全性定理を示す．

定理 5.4（ゲーデルの第二不完全性定理）理論 T が PA の RE 拡大で無矛盾ならば $T \nvdash \mathrm{Con}(T)$ である．

本研究では田中 [1] で与えられていなかった証明を補い，卒業論文にまとめた．以下にその概要を示す．

証明　G を T のゲーデル文とする．ここで，定理 4.2.2(1) を表す論理式

$$\mathrm{Con}(T) \to \neg\mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner G\urcorner})$$

が T で証明できることを示す．(**D3**) と定義 4.2.1，さらに補題 5.3(1) により

$$T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner G\urcorner}) \to \Big(\mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner G\urcorner}) \wedge \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\neg G\urcorner})\Big)$$

が得られる．一方，$T \vdash G \wedge \neg G \to \perp$ であることから，補題 5.3(1),(2) によって

$$T \vdash \Big(\mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner G\urcorner}) \wedge \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\neg G\urcorner})\Big) \to \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\perp\urcorner})$$

がいえる．これより

$$T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner G\urcorner}) \to \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\perp\urcorner})$$

が得られる．このことと定義 5.1 をあわせて

$$T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner G\urcorner}) \to \neg\mathrm{Con}(T)$$

つまり

$$T \vdash \mathrm{Con}(T) \to \neg\mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner G\urcorner}) \tag{†}$$

が得られる．

いま，T が無矛盾であることから，定理 4.2.2(1) と定義 4.2.1 より $T \nvdash \neg\mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner G\urcorner})$ となる．よって，(†) より $T \nvdash \mathrm{Con}(T)$ が導かれる．

6　おわりに

本研究では，公理体系 PA を導入して，PA における表現可能性を示した．そして，PA においてゲーデル数を用いることで，ゲーデルの不完全性定理を証明した．具体的には，第一不完全性定理は「証明も反証もできない命題が存在する」ことを，第二不完全性定理は「ある算術の公理系が無矛盾であることを，その公理系で証明することはできない」ことを意味しており，これらのことから，ある体系が不完全であるならば，公理をいくつ増やしても不完全である，ということが分かった．この結果を踏まえ，今後コンピュータにおいて「機械にできること」を広げていくと同時に，「人間にしかできないこと」をより深くとらえられていくことを期待したい．

参考文献

[1] 田中一之 [編]：『ゲーデルと２０世紀の論理学③』．東京大学出版，2007.