

ポアンカレ写像に基づく受動歩行の安定化

2006MI085 河野 有希

指導教員 大石 泰章

1 はじめに

従来より、ロボットの二足歩行についての研究が多く行われている．中でも受動歩行は，複雑な制御を行わず，ロボットの構造を工夫することで，ゆるやかな坂道を下っていくというもので，エネルギー消費が少なく，自然な歩容が得られるので注目されている．[1] しかし受動歩行は，初期条件や外乱に対して鋭敏であり，わずかな初期条件の誤差や外乱によって歩容が乱れ，安定な歩行が続けられないことが問題視されている．そこで，本研究では，受動歩行において脚の切り換わる直後の状態に，インパルス的な入力を加えて，歩行の安定性を増すことを考える．そのために，受動歩行のポアンカレ写像の解析的表現を求めた文献 [2] の研究に基づき，入力を含むポアンカレ写像を求め，それをもとに極配置法を使って制御系設計を行う．

2 受動歩行のモデリング

本研究では，図 1 に示すようなコンパス型の歩行機のモデルを使って，受動歩行を考える．

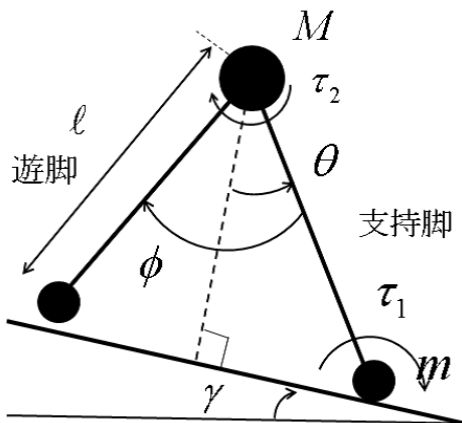


図 1 コンパスモデル

図 1 のコンパスモデルにおいて，斜面上に接地している側の脚を支持脚，もう一方の斜面から離れている側の脚を遊脚と呼ぶことにする．また，股関節部での回転摩擦や，支持脚の先端部でのリンクする所の質量は考えないものとする．

まず，図 1 のコンパスモデルに対する Lagrange の運動方程式を求め，傾斜角，歩幅，角速度等を微小と仮定して，線形の状態空間表現を得る．ただし，状態ベクトルを $x = [\theta \ \dot{\theta} \ \phi \ \dot{\phi}]^T$ とする．

また，遊脚が地面と衝突する瞬間の幾何学条件と，遊脚及びリンク系の角運動量保存則から，ある行列 R に対して，衝突前後に $x^+ =: Rx^-$ によって状態が不連続に

遷移することがわかる，ただし，添え字の $-/+$ は衝突直前/直後の状態を表すものとする．

また，遊脚が地面と衝突するのは， $\phi = 2\theta$ のときであり，これをジャンプ条件と呼ぶことにする．また，行列を使って， $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} x = 0$ と表すことができる．以下，この行列を c と記す．

3 入力を含むポアンカレ写像の解析的表現

今，歩行の安定性を増すためにフィードバック制御を行うことを考える．通常の線形システムとは違って，不連続に状態が遷移するため扱いが難しい．制御則の設計は受動歩行機のポアンカレ写像に基づいて行う．

受動歩行機を時刻 $t = 0$ に初期状態 x_0 から動かす時，時刻 t における状態を $x(x_0, t)$ とかく．今システムが周期解を持つと仮定すると， $x(x_0, \tau_0) = x_0$ となる初期条件 x_0 と周期 τ_0 が存在する．以下では，特に x_0 はジャンプ直後の状態であるとし， x_0 に摂動 Δx を与えることで x_0 を初期値とする周期解の安定性を調べる．初期状態 $x_0 + \Delta x$ から出発した解が，最初にジャンプを起こした直後の状態を $x_0 + \Delta x'$ とかくとき，ポアンカレ写像は偏差 Δx から $\Delta x'$ への写像と定義する．すなわち，

$$\Delta x' = P\Delta x + Qu. \quad (1)$$

そして，入力をデルタ関数を使って以下のようにする：

$$u = u_0\delta(t). \quad (2)$$

文献 [2] では，入力を含まない歩行機において，ジャンプ直前の状態から次のジャンプの直前の状態へのポアンカレ写像を求めている．しかし，ジャンプの直前にジャンプが起こることを検出するのは難しいので，制御入力を加えるという本研究の目的には適合しない．

それを考慮して，本研究では，ジャンプ直後の状態に摂動を与えて，次のジャンプ直後の状態へのポアンカレ写像を求めることを考える．まず，初期状態に摂動 Δx を与えた状態は，次式で与えられる：

$$\begin{aligned} Rx(x_0 + \Delta x, \tau_0 + \Delta\tau) &= Re^{A(\tau_0 + \Delta\tau)} \{ (x_0 + \Delta x) \\ &+ \int_0^{\tau_0 + \Delta\tau} e^{-A\xi} (b + Bu_0\delta(\xi)) d\xi \}. \end{aligned} \quad (3)$$

この時， $\Delta\tau$ はジャンプを起こすまでの時間の τ_0 からのずれを表す．変数 α に対して高位の微小量を $o(\alpha)$ と表すとき，Taylor 展開を使って，行列指数関数 e^{At} を展開し，各要素を以下のように書き表すことができる：

$$\begin{aligned} e^{A(\tau_0 + \Delta\tau)} &= e^{A\tau_0} \{ I + A\Delta\tau + o(\Delta\tau) \}, \\ \int_{\tau_0}^{\tau_0 + \Delta\tau} e^{-A\xi} b d\xi &= e^{-A\tau_0} b\Delta\tau + o(\Delta\tau). \end{aligned}$$

また, x_0 が周期的な軌道上にあり, τ_0 が周期であることから次が成り立つ:

$$Re^{A\tau_0}(x_0 + \int_0^{\tau_0} e^{-A\xi} b d\xi) = x_0.$$

式を簡単にするために, $v_0 = Ae^{A\tau_0}(x_0 + \int_0^{\tau_0} e^{-A\xi} b d\xi) + b$ として, 上の3つの式を (3) 式に代入して整理すると以下のようなになる:

$$\begin{aligned} Re^{A(\tau_0+\Delta\tau)}\{(x_0^+ + \Delta x) + \int_0^{\tau_0+\Delta\tau} e^{-A\xi}(b + Bu_0\delta(\xi)) d\xi\} \\ = x_0^+ + Re^{A\tau_0}\Delta x + Re^{A\tau_0}Bu_0 + Rv_0\Delta\tau \quad (4) \end{aligned}$$

ここで, $\Delta\tau$ を評価するために, 状態 x と時刻 τ の2変数関数 $F(x, \tau) = c[e^{A\tau}Rx + \int_0^\tau e^{-A\xi}(b + Bu_0\delta(\xi)) d\xi]$ を考える. $F(x_0, \tau_0) = 0, F(x_0 + \Delta x, \tau_0 + \Delta\tau) = 0$ なので, 陰関数定理から,

$$\Delta\tau = -\frac{1}{cv_0}ce^{A\tau_0}\Delta x - \frac{1}{cv_0}ce^{A\tau_0}Bu_0 + o(\Delta x)$$

が求められる. これを (4) 式に代入して, 入力を含むシステムの偏差のポアンカレ写像を求める. すなわち,

$$\Delta x' = P\Delta x + Qu_0 + o(\Delta x) \quad (5)$$

とするとき, P と Q は次式で与えられる:

$$\begin{aligned} P &= R(1 - \frac{v_0c}{cv_0})e^{A\tau_0}, \\ Q &= R(1 - \frac{v_0c}{cv_0})e^{A\tau_0}B. \end{aligned}$$

これで, 入力を含んだ場合のジャンプ直後からジャンプ直後へのポアンカレ写像が求められた.

4 極配置に基づく制御系設計

前節で入力を含むジャンプ直後から次のジャンプ直後の状態へのポアンカレ写像の解析的表現を求めることができた. 本節では, その解析的表現を利用して, 制御設計を行う.

制御設計には極配置法を用いることにする. $\Delta x' = P\Delta x + Qu_0$ の入力を $u_0 = -K\Delta x$ と選び, $P - QK$ の固有値を設計する. 入力 $u(t) = u_0\delta(t)$ は, Δt を十分短い幅として, ジャンプの直後に時間 Δt だけ $u(t) = -K(x - x_0)/\Delta t$ を入力し, その後は $u(t) = 0$ を入力することで近似する.

制御系設計した受動歩行システムのグラフを縦軸を状態, 横軸を時間として図2に示す. 図2のグラフより, 安定した歩行が続いていることが分かる. 次に, 制御を行ったことで, 受動歩行の安定性がいかに向上したかがわかるように, 制御があるシステムとないシステムの双方に外乱を入れて比較する. ただし, 外乱はジャンプ直後に Gauss 雑音を加えることで実現する. その結果を図3に示す. 図3より, 制御がない場合はジャンプ直後の状態にバラつきがあるが, 設計した入力を入れると, 波形が安定していることが分かる.

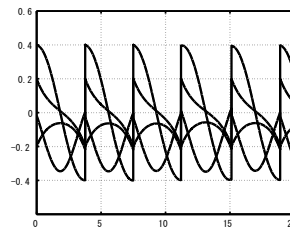


図2 制御を行った場合の状態変化

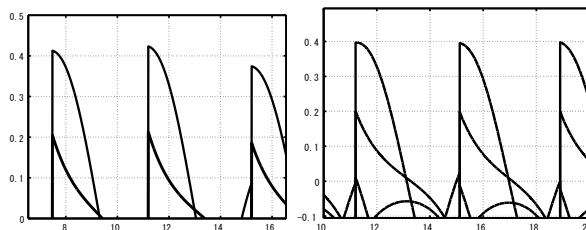


図3 左図: 制御なし, 右図: 制御あり

これをよりはっきりさせるために, 横軸を状態の第1成分である θ , 縦軸を状態の第2成分である $\dot{\theta}$ にとり, ジャンプ直後の状態をプロットする.

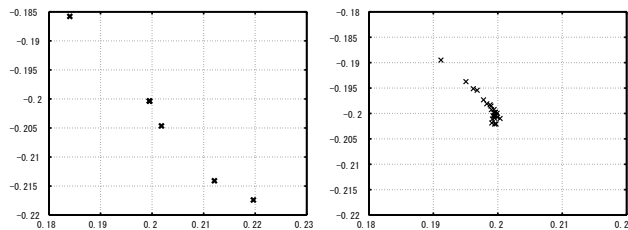


図4 外乱を加えた場合のジャンプ直後の状態の分布: 左図: 制御なし, 右図: 制御あり

図から分かるように, 制御を行った場合の方が状態の分散が小さい. よって, 安定性が増していることが分かる.

5 おわりに

本研究では, 受動歩行機に対して入力を含み, ジャンプ直後の状態から次のジャンプ直後の状態へのポアンカレ写像を解析的に求めた. そしてそれを用いて, 極配置法を使って入力を制御系設計し, 受動歩行の安定性を向上させることができた.

参考文献

- [1] 大須賀公一: 二足歩行ロボットの力学と制御 - より本質的な歩行とは? - . 応用数理, Vol. 13, No. 4(Dec.2003), pp. 285-295.
- [2] 平田, 小亀: 状態にジャンプを有する線形システムの周期運動 - Compass Walking のモデリング, 安定解析, フィードバック制御. システム制御情報学会論文誌, Vol. 17, No. 12(2004), pp. 553-560.