

# 複数の条件下でのスーパーマーケットにおける待ち行列 クイックレジ設置シミュレーション

2006MI024 服部 智文

指導教員:澤木 勝茂

## 1 はじめに

あるスーパーマーケットでは来店客が非常に多く、タイムサービスの時間になると行列が絶えない。一方、雨の日は悪天候による客の減少を考慮せずにレジ係の勤務シフトを作るため、空いているレジが多い。そのため、本研究ではこうした余分な人件費を削減するために、天候や時間帯を考慮したレジ台数の最適化について考える。

また、昼の時間帯は多くの客が来る中で多量の商品を購入をする客もいれば、昼食だけ買いに来る客もいる。しかし、昼食だけ買いに来る客の多くは現在、コンビニエンスストアを利用している。スーパーマーケットにこれらの客を呼び戻すためにはレジでの待ち時間削減が急務である。というのも昼食だけ買いに来た客が、購入点数の多い客の後に並んだ場合、わずかなサービス時間のために長い時間待たなければならぬからだ。その問題を解決するために購入点数が少ない人専用のレジ(クイックレジ)をどの条件下で何台作るべきかを考える。

## 2 記号の説明

- $\mu$  : サービス率 (人/分)
- $\mu_k$  : 客が  $k$  人のときのサービス率 (人/分)
- $\mu_q$  : 3点以内の購入客のサービス率 (人/分)
- $\lambda$  : 到着率 (人/分)
- $\lambda_k$  : 待ち人数が  $k$  人の時, 平均到着率 (人/分)
- $\lambda_\alpha$  : 実質到着率 (人/分)
- $\lambda_q$  : クイックレジへの到着率 (人/分)
- $\rho$  : 利用率 ( $\frac{\lambda}{\mu}$ )
- $L$  : 1つのレジにいる平均客数
- $L_{nq}$  : モデル2での通常レジ平均客数
- $L_{qq}$  : クイックレジの平均客数
- $P_j$  : 1つのレジにいる客が  $j$  人の確率
- $W$  : レジでの平均滞在時間 (分)
- $W_{nq}$  : モデル2での通常レジ平均滞在時間 (分)
- $W_{qq}$  : クイックレジの平均滞在時間 (分)
- $a_k$  : 系内にいる客が  $k$  人のとき, レジに並ぶ客の割合
- $y$  : すべてのレジ台数
- $Y$  : モデル2の通常レジ台数 ( $y - s$ )
- $s$  : クイックレジのレジ台数

## 3 モデルの設定

モデルとなるスーパーマーケットの近くには競合するたくさんのスーパーマーケットがあり、レジの待ち人数が多くなると客の減少が危惧される。今回は何人レジにいと並びたくないかアンケートを20人に取り、待ち人数の増加による客の減少を考慮した待ち行列モデルを作成し、通常のレジにおいて適用する。

## 4 モデル1:クイックレジを考慮しないモデル

モデルとなるスーパーマーケットは大型店であるため、それぞれのレジにおいてM/M/1待ち行列を使う。

また、 $a_k$  はアンケートにより求めた値であるため、ある待ち人数  $n$  を越えるとき  $a_k|_{k \geq n} = 0$  となる。アンケート結果より  $a_k$  は図1のようになるので  $n = 6$  である。ま

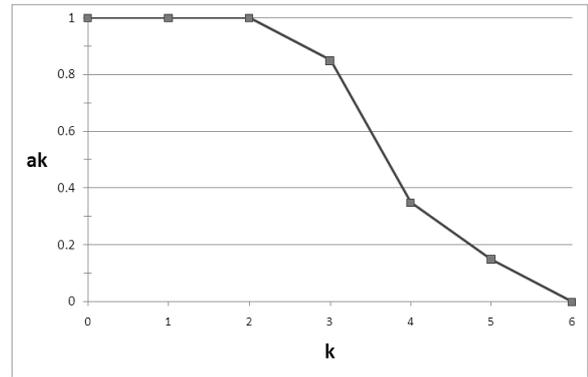


図1 客がレジに並ぶことをあきらめない割合

た、 $P_j$  と  $L$  は公式より以下のように与えられる [2] ,

$$P_j = \begin{cases} (\sum_{l=0}^{\infty} \prod_{k=1}^l \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k})^{-1} & (j=0 \text{ のとき}) \\ (\prod_{k=1}^j \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}) P_0 & (j > 0 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (1)$$

$$L = \sum_{k=0}^{\infty} k P_k, \quad (2)$$

$$\text{ただし, } \prod_{k=1}^0 \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} = 1 \text{ と定義する.} \quad (3)$$

以上より、レジが  $y$  台で1つのレジに平均  $L$  人いるとき、以下の方程式を満たす;

$$L = \frac{y^{n-1} + 2a_1 \rho y^{n-2} + \dots + n \prod_{k=1}^{n-1} a_k \rho^{n-1}}{\frac{y^n}{\rho} + y^{n-1} + a_1 \rho y^{n-2} + \dots + \prod_{k=1}^{n-1} a_k \rho^{n-1}} \quad (4)$$

また、実質到着率  $\lambda_\alpha$  は、

$$\lambda_\alpha = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k P_k \quad (5)$$

$$= \frac{1}{y} \lambda P_0 (1 + \frac{a_1}{y} \rho + \dots + \frac{a_1 a_2 \dots a_{n-1}}{y^{n-1}} \rho^{n-1}) \quad (6)$$

となり、レジにいる滞在時間  $W$  はリトルの公式より、

$$W = \frac{L}{\lambda_\alpha} \quad (7)$$

$$= \frac{1}{\mu} \left( \frac{y^{n-1} + 2a_1 \rho y^{n-2} + \dots + n \prod_{k=1}^{n-1} a_k \rho^{n-1}}{y^{n-1} + a_1 \rho y^{n-2} + \dots + \prod_{k=1}^{n-1} a_k \rho^{n-1}} \right) \quad (8)$$

よって式 4 より，最適なレジ台数  $y$  を求められる．

## 5 モデル 2:クイックレジを考慮したモデル

### 5.1 クイックレジの定義

クイックレジ設置の目的は昼食だけを買いに来るコンビニ客の取り戻しである．そういった客は弁当，飲み物，菓子の組み合わせで買う人が多い．

そのため，今回は 3 点以下の買い物をする人をクイックレジの対象とする．

### 5.2 モデルの定式化

#### 5.2.1 通常レジの平均客数と平均滞在時間

通常レジはそれぞれのレジで M/M/1 待ち行列を適用する．クイックレジを  $s$  台設置したとき，モデル 1 の  $y$  を  $Y$  に変えることで定式化できる．このとき，平均客数  $L_{nq}$  と平均滞在時間  $W_{nq}$  は，以下ようになる，

$$L_{nq} = \frac{Y^{n-1} + 2a_1\rho Y^{n-2} + \dots + n \prod_{k=1}^{n-1} a_k \rho^{n-1}}{\frac{Y^n}{\rho} + Y^{n-1} + a_1\rho Y^{n-2} + \dots + \prod_{k=1}^{n-1} a_k \rho^{n-1}} \quad (9)$$

$$W_{nq} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{Y^{n-1} + 2a_1\rho Y^{n-2} + \dots + n \prod_{k=1}^{n-1} a_k \rho^{n-1}}{Y^{n-1} + a_1\rho Y^{n-2} + \dots + \prod_{k=1}^{n-1} a_k \rho^{n-1}} \right) \quad (10)$$

#### 5.2.2 クイックレジの平均客数と平均滞在時間

一般的に M/M/s 待ち行列は M/M/1 待ち行列よりも効率的である．しかし列が長くなるため，スーパーではあまり実用されていない．今回も同様の短所があるが，クイックレジにおいて 2 台程度であれば十分実用可能である．そのため，クイックレジを 2 台設置したとき，M/M/s 待ち行列 [1] を適用し，それ以外のときはそれぞれのレジで M/M/1 待ち行列を適用する．

クイックレジは待ち人数の増加による客の減少を考慮しないため，平均客数  $L_{qq}$  と滞在時間  $W_{qq}$  は以下のようになる．

$$L_{qq} = \begin{cases} \frac{\lambda_q}{s\mu_q - \lambda_q} & (s \neq 2) \\ \frac{4\mu_q\lambda_q}{4\mu_q^2 - \lambda_q^2} & (s = 2) \end{cases} \quad (11)$$

$$W_{qq} = \begin{cases} \frac{s}{s\mu_q - \lambda_q} & (s \neq 2) \\ \frac{4\mu_q}{4\mu_q^2 - \lambda_q^2} & (s = 2) \end{cases} \quad (12)$$

### 5.3 クイックレジ設置の条件

クイックレジの効果を出すためにクイックレジ設置の条件を以下のようにする．

- $L_{nq} - L_{qq} \geq 1$
- $W_{qq} \leq 1$
- $W_{nq} \leq 4$

以上の条件を満たさない時設置しない．

## 6 数値計算

### 6.1 モデル 1 の場合

図 1 より 1 つのレジにいる客数を 2 人程度したい．数値計算の結果最も近似できるのは表 1 のようになる．

表 1 モデル 1 の数値計算結果

|     | 晴    |      |      |      |      |      |
|-----|------|------|------|------|------|------|
|     | 平日   |      | 土曜   |      | 日曜   |      |
|     | 朝    | 夜    | 朝    | 夜    | 朝    | 夜    |
| $y$ | 8    | 7    | 11   | 7    | 13   | 10   |
| $L$ | 2.05 | 2.10 | 2.06 | 2.14 | 1.98 | 2.00 |
| $W$ | 1.86 | 2.22 | 2.49 | 2.05 | 2.42 | 2.25 |
|     | 雨    |      |      |      |      |      |
|     | 平日   |      | 土曜   |      | 日曜   |      |
|     | 朝    | 夜    | 朝    | 夜    | 朝    | 夜    |
| $y$ | 8    | 7    | 10   | 8    | 12   | 10   |
| $L$ | 2.09 | 2.05 | 2.03 | 1.91 | 2.07 | 1.91 |
| $W$ | 1.76 | 2.05 | 2.16 | 1.91 | 2.35 | 2.10 |

表 2 モデル 2 の数値計算結果

|          | 晴    |      |      |      |      |      |
|----------|------|------|------|------|------|------|
|          | 平日   |      | 土曜   |      | 日曜   |      |
|          | 朝    | 夜    | 朝    | 夜    | 朝    | 夜    |
| $Y$      | 8    | 6    | 10   | 7    | 12   | 8    |
| $s$      | 0    | 1    | 1    | 0    | 1    | 2    |
| $L_{nq}$ | 2.05 | 2.76 | 2.51 | 2.14 | 2.38 | 2.81 |
| $L_{qq}$ | -    | 1.56 | 0.96 | -    | 1.35 | 0.78 |
| $W_{nq}$ | 1.86 | 3.62 | 3.41 | 2.05 | 3.32 | 3.67 |
| $W_{qq}$ | -    | 1.00 | 0.76 | -    | 0.92 | 0.44 |
|          | 雨    |      |      |      |      |      |
|          | 平日   |      | 土曜   |      | 日曜   |      |
|          | 朝    | 夜    | 朝    | 夜    | 朝    | 夜    |
| $Y$      | 8    | 6    | 8    | 6    | 10   | 8    |
| $s$      | 0    | 1    | 2    | 2    | 2    | 2    |
| $L_{nq}$ | 2.09 | 3.05 | 3.01 | 3.18 | 2.87 | 2.20 |
| $L_{qq}$ | -    | 0.84 | 0.81 | 0.84 | 0.69 | 0.76 |
| $W_{nq}$ | 1.76 | 3.87 | 3.84 | 3.99 | 3.71 | 3.16 |
| $W_{qq}$ | -    | 0.72 | 0.45 | 0.45 | 0.43 | 0.44 |

### 6.2 モデル 2 の場合

レジチェッカーの人数を一日に何回も変えるということとはできないので，モデル 1 で設定したレジ台数をモデル 2 におけるすべてのレジ台数とすると 5.3 節より最適解は表 2 のようになる．

## 7 おわりに

日本ではまだクイックレジが実用されているところは非常に少ない．その代わりに多くのスーパーマーケットでセルフレジが実用化されている．クイックレジとセルフレジのどちらが利益拡大につながるかを考えることが今後の課題である．

### 参考文献

- [1] 小和田正, 澤木勝茂, 加藤豊: OR 入門, 実教出版 (1984)
- [2] 尾崎俊治: 確率モデル入門, 朝倉書店 (1996)