整数論
—フィボナッチ数に関する性質—

2005MM027 高井真由子
指導教員：宮元忠敏

1　はじめに

フィボナッチ数列とは,

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

と続いていく数列である．つまり，隣り合う 2 項の和がその次の項になるという数列である．フィボナッチ数が誕生してから約 800 年．数多くの関係式が見つかり，またそこから新しい応用の世界が広がっている．なかでも，自然界においては数多くの関係があり，花びらの枚数や花の芯のところにみられる螺旋の本数は多くがフィボナッチ数になっている．また，黄金数やパスカルの三角形にも関係し，フィボナッチ数は様々な場面で顔を出している．

こんな簡単な数列から数の世界が広がっていることに興味を持ったため，本研究では，文献 [3] にそって，フィボナッチ数とそれに関するリュカ数という数列の性質 (特に整除性と周期性について) を学び理解するとともに，文献 [1]，[2] を用いて理解を深め，さらに新しい性質を発見することを目的とし，フィボナッチ数の世界に触れることとする．

2　定義

2.1　フィボナッチ数列

フィボナッチ数列の定義

$$F_0 = 0,\, F_1 = 1,\, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \qquad \text{(F)}$$

2.2　一般フィボナッチ数列

フィボナッチ数列の初期条件 $F_0 = 0$，$F_1 = 1$ をはずし一般形にしたものを，**一般フィボナッチ数列**という．一般フィボナッチ数列は次のように定義される：

一般フィボナッチ数列の定義

$$G_{n+2} = G_{n+1} + G_n. \qquad \text{(G)}$$

2.3　リュカ数列

フィボナッチ数列に類似した数列に**リュカ数列**という数列がある．この数列は，(G) を満たし，フィボナッチ数列とは初期条件が異なるだけである．リュカ数列は次のように定義される：

リュカ数列の定義

$$L_0 = 2,\, L_1 = 1,\, L_{n+2} = L_{n+1} + L_n. \qquad \text{(L)}$$

リュカ数列は，2,1,3,4,7,11,18,29,47,76,... と続く．

3　整除性

整除性とは，ある整数で割り切れるという性質である．

3.1　素数における整除性

フィボナッチ数において，奇素数 $p (p \neq 5)$ に対して次が成り立つ：

F_n の素数における整除性

$(F1) p \equiv \pm 1 \pmod 5$ のとき,

$$F_p \equiv 1 \pmod p,\, F_{p-1} \equiv 0 \pmod p,$$

$(F2) p \equiv \pm 2 \pmod 5$ のとき,

$$F_p \equiv -1 \pmod p,\, F_{p+1} \equiv 0 \pmod p.$$

これらをまとめると表 1 のようになる．

表 1　F_n を素数 p で割った余り

$mod p$	F_{p-3}	F_{p-2}	F_{p-1}	F_p	F_{p+1}	F_{p+2}	F_{p+3}
$(F1)$	-1	1	0	1	1	2	3
$(F2)$	3	-2	1	-1	0	-1	-1

$p \equiv \pm 1 \pmod 5$ の場合をみると，F_{p-1} を p で割った余りの 0 から始まり，順にフィボナッチ数列が現れていることが分かる．

リュカ数においては，奇素数 $p (p \neq 5)$ に対して次が成り立つ：

L_n の素数における整除性

$(L1) p \equiv \pm 1 \pmod 5$ のとき,

$$L_p \equiv 1 \pmod p,\, L_{p-1} \equiv 2 \pmod p,$$

$(L2) p \equiv \pm 2 \pmod 5$ のとき

$$L_p \equiv 1 \pmod p,\, L_{p+1} \equiv -2 \pmod p.$$

これらをまとめると表 2 のようになる．

表 2　L_n を素数 p で割った余り

$mod p$	L_{p-3}	L_{p-2}	L_{p-1}	L_p	L_{p+1}	L_{p+2}	L_{p+3}
$(L1)$	3	-1	2	1	3	4	7
$(L2)$	-7	4	-3	1	-2	-1	-3

リュカ数の場合は，$p \equiv \pm 1 \pmod 5$ のとき，L_{p-1} を p で割った余りの 2 から始まり，順にリュカ数列が現れていることが分かる．

3.2 素数の 2 乗における整除性

素数における整除性から素数の 2 乗における整除性を考える．すると，以下の規則が求まる：

F_n の素数の 2 乗における整除性

素数 p に対して，

$p \equiv \pm 1 (\mod 5)$ のとき, $F_{p(p-1)} \equiv 0 (\mod p^2)$,
$p \equiv \pm 2 (\mod 5)$ のとき, $F_{p(p+1)} \equiv 0 (\mod p^2)$.

L_n の素数の 2 乗における整除性

素数 p に対して，

$p \equiv \pm 1 (\mod 5)$ のとき, $L_{p(p-1)} \equiv 2 (\mod p^2)$,
$p \equiv \pm 2 (\mod 5)$ のとき, $L_{p(p+1)} \equiv -2 (\mod p^2)$.

4 周期性

周期性

整数値をとる一般フィボナッチ数列 G_n を，任意に与えた自然数 $m(m > 1)$ で割った余りは周期性を持つ．

つまり，G_n を自然数 m で割った余りが，ある周期で繰り返されて規則的に並んでいるということである．その周期の長さを $k(m)$ とする．これより，フィボナッチ数もリュカ数も，どんな自然数で割っても必ず周期性が現れる．

4.1 フィボナッチ数の周期性

フィボナッチ数においては，$F_0 = 0$ であったので，どんな自然数 m に対しても，$n \leq m^2$ を満たすある適当な番号 n に対して，$F_n(\mod m)$ は第 0 項の余り 0 と一致する．つまり，フィボナッチ数の場合は，任意の自然数 m で割り切れる F_n が必ず存在するということである $(n \leq m^2)$.

4.2 リュカ数の周期性

リュカ数の場合は，$m = 5, 8$ やさらに 5 や 8 の倍数のときには余りに 0 が現れない．つまり，任意の自然数 m で割り切れる L_n が必ずしも存在するわけではないということである．これが，フィボナッチ数との決定的な違いである．

4.3 素数における周期性

素数における整除性の話に関連して，素数における周期性を考えると次が成り立つ：

素数における周期性

奇素数 $p(p \neq 5)$ に対して，

$p \equiv \pm 1 (\mod 5)$ のとき,$k(p)$ は $p-1$ の約数である,
$p \equiv \pm 2 (\mod 5)$ のとき,$k(p)$ は $2p+2$ の約数である.

4.4 エントリー・ポイント

ここからは，話をフィボナッチ数に限定する．

任意の自然数 m に対して，m で割り切れるフィボナッチ数が存在することを 4.1 小節で述べた．このようなフィボナッチ数 F_n の番号 n のうちで最小の自然数を $d = d(m)$ と書いて，m の**エントリー・ポイント**という．これを使うと，次が成り立つ：

エントリー・ポイント

任意の自然数 $m(m > 1)$ のエントリー・ポイント $d(m)$ について

$$F_n \equiv 0 (\mod m) \Leftrightarrow n \equiv 0 (\mod d(m)).$$

すなわち，フィボナッチ数において，自然数 m に対して，

$$d(m) | k(m). \qquad (1)$$

ここで，F_n を自然数 m で割ったときの $k(m)$ と $d(m)$ を表 5 に示す．

表 3 F_n を m で割ったときの $k(m)$ と $d(m)$

m	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$k(m)$	3	8	6	20	24	16	12	24	60	...
$d(m)$	3	4	6	5	12	8	6	12	15	...

(1) が成り立っていることを確認できる．もう少し詳しくみると，$k(m)$ と $d(m)$ の間には以下の 3 パターンがあることが分かる：

1. $k(m) = d(m)$;
   $F_n \equiv 0 (\mod m)$ なる n が $k(m) = d(m)$ の 1 つ.
2. $k(m) = 2d(m)$;
   $F_n \equiv 0 (\mod m)$ なる n が $k(m)$ と $d(m)$ の 2 つ.
3. $k(m) = 4d(m)$;
   $F_n \equiv 0 (\mod m)$ なる n が $k(m)$ と $d(m)$ と $k(m)$ と $d(m)$ の間にもう 2 つの 4 つ.

5 おわりに

本研究では，主にフィボナッチ数とリュカ数の整除性と周期性についての研究を行った．多くの性質に触れ規則を見つけることもできたが，まだまだ発見できることはたくさんあると感じる．よって今後は，データ量を増やしてより正確な結果を得，また新たな規則を発見することを目的として，研究を進めたい．

参考文献

[1] Ronald L. Graham，Donald E. Knuth，Oren Patashnik(有澤誠・安村通晃・萩野達也・石畑清 訳)：『コンピュータの数学』．共立出版株式会社，東京，2002

[2] 小林昭七：『なっとくする オイラーとフェルマー』．講談社，東京，2003.

[3] 中村滋：『改定版 フィボナッチ数の小宇宙/フィボナッチ数, リュカ数, 黄金分割』．日本評論社，東京，2008.