黄金幾何

2005MM090 山田実世
指導教員：佐々木克巳

1　はじめに

本研究は、Hans[1] を参考にして、黄金幾何について研究をする。具体的には、黄金長方形、黄金三角形、黄金平行四辺形を扱い、特に黄金長方形について深く理解することを目的とする。

2　黄金比

黄金比とは何か示すために次の定義をする。

定義　線分が黄金比で２つの部分線分に分けられるとは、長い方の部分線分と短い方の部分線分との比が、線分全体と長い方の線分との比に等しいことである。

このとき、線分全体の長さが τ、長い方の線分の長さが 1 とすると、

$$1 : \tau = \tau - 1 : 1$$

より

$$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

となる。この τ を黄金比と呼ぶ。τ の逆数を ρ とすると、

$$\rho = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

である。

3　黄金長方形

この節では黄金長方形の性質について述べる。

3.1　黄金長方形の分割

黄金長方形とは、辺の長さの比が黄金比である長方形のことである。

長方形が「図 1a) のように長方形から正方形を切り離して得られる残りの長方形がもとの長方形と相似である」という性質を満たすとき、その長方形は黄金長方形である。逆に、黄金長方形から正方形を切り離すと、残った長方形は、もとの長方形と相似、すなわち、黄金長方形である。この作業を続けると、もとの黄金長方形はこれらの正方形に切り離され、図１ b) のような図が得られる。

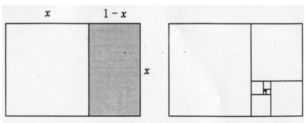

図 1　黄金長方形

また、黄金長方形の分割 (図 1b)) の各正方形に４分の１円を描くと図 2 のような螺線が現れる。

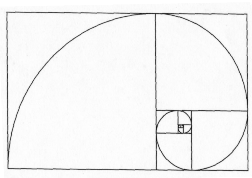

図 2　黄金長方形の中の螺旋

3.2　黄金長方形の一般化

長方形の長い方の辺が 1、短い方の辺が x であるとき、$n(n \in N)$ 個の１辺の長さが x の正方形を切り離したときに、もとの長方形と相似な長方形が残るとする。このときの x の正の解は

$$x = \frac{-n+\sqrt{n^2+4}}{2}$$

である。

そして、$n = 2$ のときも、図 1b) のような分割を考えることができる。ただし、この場合は、その長方形から対称的に正方形を切り離すこととする。この分割に対しても螺旋を描くことができる。すなわち、２つの点対称な螺旋で、それぞれが４分の１円からなり、互いの中に巻き込んでいくと、図 3 のような螺旋を描くことができる。

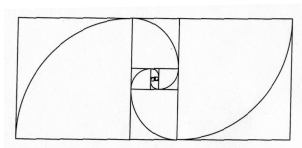

図 3　２重螺旋

また、$n = 3$ のときは、上の $n = 2$ のときと同様には、黄金長方形の分割に対して螺旋を描くことができない。しかし、図 4 のように、各長方形の長い方の辺に弧を描くと螺旋が現われる。

$n = 4, 5, 6, \cdots$ のときも、$n = 3$ と同様に螺旋を描くことができる。さらに、$n = 2$ のときも、同様に螺旋を描くことができる。

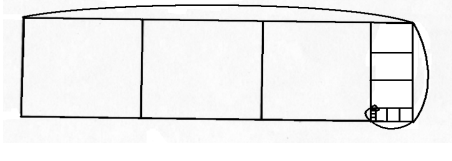

図 4

3.3　黄金長方形の対角線

黄金長方形の分割 (図 1b)) において、横長の各長方形の右下がりの対角線は、すべて同一の直線上にあること、

および、縦長の各長方形の右上がりの対角線も、すべて同一直線上にあることを証明する。

黄金長方形を分割する正方形を、一辺が長い方から、$A_1, A_2, A_3, \cdots$ と名前をつける。

ここで、一番大きい黄金長方形の左下の点を原点とし、その長い辺を含む直線が x 軸になるよう座標軸をとる。すると、一番大きい横長の長方形の右下がりの対角線の方程式は、傾きが $-\rho$ で $(0, \rho)$ を通るので、

$$y = -\rho x + \rho \qquad (1)$$

である。

このとき、A_n の左下の点の座標を (x_n, y_n) とする。A_n の正方形の一辺は ρ^n である。

(x_{4n-3}, y_{4n-3}) の座標は

$$\begin{pmatrix} x_{4n-3} \\ y_{4n-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\rho(1-\rho^{4(n-1)})}{1-\rho^4} \\ \frac{\rho^4(1-\rho^{4(n-1)})}{1-\rho^4} \end{pmatrix}$$

である。

ここで、右下がりの直線の場合、求めたい点は A_{4n-3} の左上の点と A_{4n-1} の右下の点である。

A_{4n-3} の左上の点は (x_{4n-3}, y_{4n-3}) の座標から y 軸に $+\rho^{4n-3}$ 移動した点であるので、$(x_{4n-3}, y_{4n-3}+\rho^{4n-3})$ である。A_{4n-1} の右下の点は (x_{4n-3}, y_{4n-3}) の座標から x 軸に $+\rho^{4n-3}+\rho^{4n-2}$ 移動した点であるので、$(x_{4n-3}+\rho^{4n-3}+\rho^{4n-2}, y_{4n-3})$ ある。この2点の直線の方程式は、

$$y - y_{4n-3} + \rho^{4n-3} = \frac{y_{4n-3} - (y_{4n-3} + \rho^{4n-3})}{x_{4n-3} + \rho^{4n-3} + \rho^{4n-2} - x_{4n-3}}$$
$$y = -\rho x + \rho$$

よって、(1) の直線の方程式と等しいので、一直線上である。

右上がり直線の場合も同様に示すことができる。

この結果から、黄金長方形の分割には、横長の各長方形の右下がりの対角線は、すべて同一の直線上にあること、および、縦長の各長方形の右上がりの対角線も、すべて同一直線上にあることが証明できた。

3.4　対角線を利用した作図方法

図 1a) のように分割した黄金長方形に、図5のように対角線を引くと、黄金長方形の上の辺が底辺になっている三角形と、下の辺の一部が底角になっている三角形が向かい合って現われる。

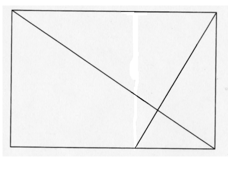

図 5　黄金長方形の対角線

そして、この2つの三角形の左の角の2点を結ぶと、正方形の対角線になっている。この正方形を切り離すと、向かい合う2つの三角形が左右に現われる。この2つの三角形の上の角の2点を結ぶと、前節で述べたことから、その線分は正方形の対角線になっている。この正方形をさらに切り離し、同様の作業を続けることができる。そして、黄金長方形を正方形に分割することができる (図6)。

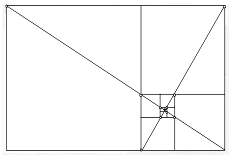

図 6　対角線を利用した作図

3.5　各正方形の中央点

図 1b) の黄金長方形の分割の各正方形の中央点 (2つの対角線の交点) の座標を探す。ただし、黄金長方形の左下の点を原点とし、その長い辺を含む直線が x 軸になるよう座標軸をとる。はじめに各正方形の中央点を、一辺が長い方から $B_1, B_2, B_3 \cdots$ とする。B_1 の座標は $(\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2})$、$B_2$ の座標は $(\rho + \frac{\rho^2}{2}, \rho - \frac{\rho^2}{2})$、$B_3$ の座標は $(1 - \frac{\rho^3}{2}, \frac{\rho^3}{2})$、$B_4$ の座標は $(\rho + \frac{\rho^4}{2}, \frac{\rho^4}{2})$、$B_5$ の座標は $(\rho + \frac{\rho^5}{2}, \rho^4 + \frac{\rho^5}{2})$、$B_6$ の座標は $(\rho + \rho^5 + \frac{\rho^6}{2}, \rho^3 - \frac{\rho^6}{2})$ である。そして、B_1 と B_3、B_1 と B_5 を結ぶ直線の傾きは $-\frac{1}{3}$ であり、B_2 と B_4、B_2 と B_6 を結ぶ直線の傾きは3である。

つぎに、一般的に考える。3.3節で求めた、x_{4n-3}, y_{4n-3} の値を利用する。すると、B_{4n-3} と B_{4n-1} を通る直線の傾きは n によらず、

$$\frac{y_{4n-1} - y_{4n-3}}{x_{4n-1} - x_{4n-3}} = \frac{\frac{\rho^{4n-1} - \rho^{4n-3}}{2}}{\frac{\rho^{4n-3} + 2\rho^{4n} + \rho^{4n-1}}{2}} = -\frac{1}{3}$$

B_{4n-3} と B_{4n+1} を通る直線の傾きは n によらず、

$$\frac{y_{4n-1} - y_{4n-3}}{x_{4n-1} - x_{4n-3}} = \frac{\frac{-\rho^{4n-3} + 2\rho^{4n} + \rho^{4n+1}}{2}}{\frac{2\rho^{4n-3} + \rho^{4n+1} - \rho^{4n-3}}{2}} = -\frac{1}{3}$$

よって、B_{2n+1} は傾き $-\frac{1}{3}$ の同一の直線上にある。同様に、B_{4n} と B_{4n-2} を通る直線の傾きは n によらず、

$$\frac{y_{4n-2} - y_{4n}}{x_{4n-2} - x_{4n}} = \frac{\frac{2\rho^{4n-1} - \rho^{4n-2} - \rho^{4n}}{2}}{\frac{\rho^{4n} - \rho^{4n-2}}{2}} = 3$$

B_{4n+2} と B_{4n-2} を通る直線の傾きは n によらず、

$$\frac{y_{4n-2} - y_{4n+2}}{x_{4n-2} - x_{4n+2}} = \frac{\frac{-\rho^{4n-2} + \rho^{4n+2}}{2}}{\frac{\rho^{4n-2} - 2\rho^{4n} - \rho^{4n+2}}{2}} = 3$$

よって、B_{2n} は傾き3の同一の直線上にある。

この結果から、各正方形の中央点は、傾きが $-\frac{1}{3}$ と3の2直線上に交互にあることがわかる。

4　おわりに

本研究では、黄金長方形、黄金三角形、黄金平行四辺形の性質について研究をしてきた。図4の螺旋以外にも、黄金長方形に描ける螺旋を見つけることができなかったのが心残りである。

参考文献

[1] Hans Walser、蟹江幸博 訳：黄金分割, 日本評論社 (2002)