演繹体系と完全性定理

2005MM087 渡辺　憲

指導教員：佐々木克巳

1　はじめに

本研究の目的は，田中 [1] を用いて、完全性定理とコンパクト性定理を学び、理解することである。

コンパクト性定理の証明方法は大きく分けて二つあり、一つはゲーデルの完全性定理を用いる方法、もう一つは構造のウルトラプロダクトを用いる方法である。この論文では、完全性定理の証明、完全性定理を用いたコンパクト性定理の証明、モデル理論におけるコンパクト性定理に用いるウルトラフィルターの定義、そして補題を記述する。

2　命題論理

ここでは、命題論理におけるいくつかの概念を定義する。

命題論理の言語として、次のものを与える。

・変数　・括弧：(,)　・結合記号：$\to$ (ならば)、$\neg$(でない)

また、$\neg(A \to A)$ の省略形として $\perp$（矛盾）を用いる。

定義１　ウカシェビッチの公理系

ウカシェビッチの公理系は以下の３つの公理からなる。

$P1.A \to (B \to A)$

$P2.(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

$P3.(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$

ここでの A, B, C は任意の命題を表し、$P1, P2, P3$ はそれぞれその形の命題の集まりである。

定義２　証明

命題の集合 Σ に対して、命題列 $A_0, A_1, \cdots, A_n$ が、各 $k \leqq n$ について以下の２条件を満たしているとき、その列を Σ における A_n の証明という。

(1) A_k は公理 $(P1, P2, P3)$ であるか、Σ に属する。

(2) $i, j < k$ が存在して A_j は $A_i \to A_k$ である。

Σ における命題 A の証明が存在するとき、Σ から A が証明されるといい、$\Sigma \vdash A$ とかく。

定義３　トートロジー的帰結

Σ に属するすべての命題に値 T を割り当てるような任意の真理値関数が命題 A にも値 T を割り当てるとき、A が Σ のトートロジー的帰結であるという。記号では、$\Sigma \models A$ と書く。とくに $\emptyset \models A$ を $\models A$ と略し、このとき A をトートロジーという。

定義４　矛盾と無矛盾

命題の集合 Σ から矛盾 $\perp$ が証明されるとき、Σ は矛盾するという。そうでないとき、Σ は無矛盾であるという。

定義５　極大無矛盾集合

命題の集合 Σ が無矛盾であり、さらに任意の命題 A に対して、$A \in \Sigma$ または $\neg A \in \Sigma$ を満たすとき、Σ を極大無矛盾集合という。

3　完全性定理を証明するための準備

ここでは、完全性定理を証明するための補題を列挙する。これらの補題は、[1] の証明を補いながら理解し、その理解を卒業論文にまとめた。

補題１

公理 $(P1, P2, P3)$ はトートロジーである。

補題２ (演繹定理)

命題の集合 Σ と命題 A, B に対し、$\Sigma \cup \{A\} \vdash B \ \Rightarrow \Sigma \vdash A \to B$ が成り立つ。

補題３

Σ が無矛盾であれば、任意の A に対し、A か $\neg A$ の少なくとも一方は証明不可能である。

補題４

極大無矛盾集合 Σ と命題 A, B に対し、$(A \in \Sigma, \{A\} \vdash B) \Rightarrow B \in \Sigma$ が成り立つ。

4　命題論理の完全性定理

次の定理を完全性定理という。

定理

$$\Sigma \vdash A \Longleftrightarrow \Sigma \models A$$

これらの証明は、[1] の証明を補いながら理解し、その理解を卒業論文にまとめた。ここでは、その概要を示す。

$\Rightarrow$ の証明方法

$\Sigma \vdash A$ より Σ における証明の命題列 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ があり、$A_n = A$ である。この命題列の長さ n について帰納法を用い、$\Sigma \models A$ を導く。

$\Leftarrow$ の証明方法

背理法で示す。$\Sigma \not\vdash A, \Sigma \models A$ を仮定し、A に値 F を割り当て、Σ の命題すべてに値 T を割り当てる真理値関数が存在することをいえばよい。

まず、すべての命題を適当な順番に並べて、$A_0, A_1, A_2, \cdots$ とする。そして、$\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2, \cdots$ を各 Σ_n が無矛盾であるように定義する。

最初に、$\Sigma_0 = \Sigma \cup \{\neg A\}$ とおく。これは、仮定 $(\Sigma \not\vdash A)$ より無矛盾であることが示される。

つぎに、無矛盾な集合 Σ_n が定義されたとして Σ_{n+1} を以下のように定義する。

$$\Sigma_{n+1} = \begin{cases} \Sigma_n \cup \{A_n\} & \Sigma_n \cup \{A_n\} \text{ が無矛盾のとき} \\ \Sigma_n & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

この定義より、Σ_{n+1} も無矛盾である。また、つぎのように Σ^* を定義する。

$$\Sigma^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Sigma_n$$

この Σ^* は無矛盾である。このことは背理法で示される。

さらに Σ^* は極大無矛盾集合になっていることが示される。

Σ^* が極大無矛盾集合だから、A_n かつ $\neg A_n$ の少なくとも一方だけが Σ^* に属す。したがって、

$$A_n \notin \Sigma^* \Leftrightarrow \neg A_n \in \Sigma^* \cdots (※)$$

である。

いま、命題の集合から真理値 T, F への関数 V をつぎのように定義する。

$$V(A_n) = T \quad \Leftrightarrow \quad A_n \in \Sigma^*$$

(※) と $\neg A \in \Sigma^*$ より $A \notin \Sigma^*$ であることから、この定義より、V が命題 A に値 F を割り当てることがわかる。そして、V は Σ の命題すべてに値 T を割り当てることがわかる。あとはこの関数 V が真理値関数であることをいえばよい。まず、$V(\neg A_n) = T \Leftrightarrow V(A_n) = F$ であることは、関数 V の定義と (※) より示される。

つぎに、$V(A_m \to A_n) = T \quad \Leftrightarrow \quad V(A_m) = F$ または $V(A_n) = T$ であることは、関数 V の定義を用いる。$\Leftarrow$ の証明は、(1)$\neg A_m \in \Sigma^*$、(2)$A_n \in \Sigma^*$ の２つに場合分けして補題４より示される。$\Rightarrow$ の証明は、背理法で示される。

よって、V は命題 A に値 F を割り当て、Σ^* の命題すべてに値 T を割り当てる真理値関数であることが述べられた。

5 命題論理のコンパクト性定理

次の定理をコンパクト性定理という。

定理

Σ の任意の有限部分集合に対し、それに属するすべての命題に値 T を割り当てる真理値関数が存在すれば、Σ の命題すべてに値 T を割り当てる真理値関数が存在する。

命題論理のコンパクト性定理の証明方法

この定理の証明は、定理の対偶をとる。仮定、Σ のトートロジー的帰結の定義より、どのような命題も Σ のトートロジー的帰結になる。とくに、$\Sigma \models \neg(A \to A)$ である。したがって、完全性定理より $\Sigma \vdash \neg(A \to A)$ である。

ここで、$\Sigma \vdash \neg(A \to A)$ より、$\Sigma' \vdash \neg(A \to A)$ を満たすような Σ のある有限部分集合 Σ' が存在することを証明した。

$\Sigma' \vdash \neg(A \to A)$、完全性定理より $\Sigma' \models \neg(A \to A)$ である。$\neg(A \to A)$ に値 T を割り当てる真理値関数は存在しないため、Σ' のすべての命題に値 T を割り当てる真理値関数も存在しない。

6 モデル理論のコンパクト性

定義　ウルトラフィルター

以下では集合 I のベキ集合を $\mathcal{P}(I)$ で表す。I の “大きな部分集合” からなる族を定義する。

$I \neq \emptyset$ とする。$U \subseteq \mathcal{P}(I)$ に対してつぎの定義を与える。

1. U は有限交叉性をもつ $\Longleftrightarrow$ U の各有限部分集合 $F \subseteq U$ に対して $\bigcap F \neq \emptyset$ (すなわち、$\forall A_1, \cdots, A_n \in U$ に対して、$A_1 \cap \cdots \cap A_n \neq \emptyset$).
2. U は I 上のウルトラフィルターである $\Longleftrightarrow$ U は有限交叉性をもつ $\mathcal{P}(I)$ の部分集合の中で極大である。(すなわち、U 自体は有限交叉性をもつが U の真の拡大は有限交叉性をもたない).

6.1 補題の証明

つぎに挙げる補題は、[1] の証明を補いながら理解し、その理解を卒業論文にまとめた。

補題１

$U \subseteq \mathcal{P}(I)$ が有限交叉性をもつとする。このとき、任意の $A \subseteq I$ に対して、

$$U \cup \{A\} \quad \text{または} \quad U \cup \{A^c\}$$

の少なくとも一方は有限交叉性をもつ。

補題２

$U \subseteq \mathcal{P}(I)$ が有限交叉性をもつとき、つぎの２条件は同値である。

1. U は I 上のウルトラフィルターである。
2. 任意の $A \subseteq I$ に対して、$A \in U$ または $A^c \in U$.

補題３

U を I 上のウルトラフィルターとする。I の部分集合 A, B に対してつぎが成り立つ。

1. $A \in U, A \subseteq B \subseteq I \quad \Longrightarrow \quad B \in U$
2. $A, B \in U \quad \Longleftrightarrow \quad A \cap B \in U$

補題４

$\{U_i\}_{i<\alpha}$ を有限交叉性をもつ $\mathcal{P}(I)$ の部分集合の上昇列とする。ただし、α は順序数である。このとき、$U^* = \bigcup_{i<\alpha} U_i$ も有限交叉性をもつ。

補題５ (ウルトラフィルターの存在)

I を無限集合として、$F \subseteq \mathcal{P}(I)$ は有限交叉性をもつとする。このとき、F を拡大して I 上のウルトラフィルターにすることができる。

上記の補題を用いて、有限交叉性をもつ集合 F で $\bigcap F = \emptyset$ をみたすものが存在することが示される。具体的には、フレシェフィルターとよばれる集合が、その条件をみたす。卒業論文では、このことを [1] に従って示した。

7 おわりに

本研究では、完全性定理を理解したうえで、コンパクト性定理を証明した。そして、完全性定理を用いずにコンパクト性定理を証明できることを知り、まずウルトラフィルターの定義を用いて補題を示した。コンパクト性定理を容易に証明できる、完全性定理の重大性を実感した。残念ながら、ウルトラプロダクトの基本定理を用いてコンパクト性定理を証明する範囲まで進められなかった。

参考文献

[1] 田中一之 [編]：『ゲーデルと２０世紀の論理学②ー完全性定理とモデル理論ー』. 東京大学出版会, (2006).