多項式の全複素零点に対する精度保証付き同時円板反復解法

2005MM084 刀根佑介

指導教員: 杉浦 洋

1 はじめに

昨年の大嶽 [1] では，n 次代数方程式の全解を Weierstrass 法 (Durand-Kerner 法) *1で同時に求める研究が進められた.

本研究では，円板 Weierstrass 法 [2] により 円板を零点に収束させ，零点を包囲するなるべく小さい円板を計算する．円板 Weierstrass 法の実装には一斉更新法と順次更新法の 2 種類ある．その収束次数は一斉更新法は 2 次，順次更新法は 2 次強である.

Weierstrass 法で零点に接近した近似根に対し，その精度を調べるために Smith の定理を用いる．これにより，円板 Weierstrass 法の初期円板を生成することが可能である．実際に，C++ 円板演算システム [4] にて数値実験を行った.

2 円板と円板四則演算

中心 $c \in \mathbb{C}$，半径 $r \in \mathbb{R}$ の円板 $Z = \{z : |z - c| \le r\}$ を簡単に，

$$Z = \langle c\,;\, r\rangle \tag{1}$$

と表す．円板の中心を $c = \mathrm{mid}\, Z$，半径を $r = \mathrm{rad}\, Z$ と書く．また，円板全体の集合を $\mathbb{KC}$ とする.
2 つの円板 $A = \langle a; r\rangle, B = \langle b; s\rangle \in \mathbb{KC}$ に対する四則演算を次のように定義する.

1. $A \pm B \overset{\mathrm{def}}{=} \langle a \pm b\,;\, r + s\rangle = \{z \pm w : z \in A, w \in B\}$
2. $\frac{1}{A} \overset{\mathrm{def}}{=} \left\langle \frac{\overline{a}}{|a|^2 - r^2}\,;\, \frac{r}{|a|^2 - r^2}\right\rangle = \{\frac{1}{z} : z \in A\} \quad (0 \notin A)$
3. $AB \overset{\mathrm{def}}{=} \langle ab\,;\, |a|s + |b|r + rs\rangle \supseteq \{zw : z \in A, w \in B\}$
4. $A/B \overset{\mathrm{def}}{=} A(1/B) \supseteq \{\frac{z}{w} : z \in A, w \in B\}$

四則演算子を $* \in \{+, -, \cdot, /\}$ とすると，円板四則演算により $\alpha \in A, \beta \in B$ なら，$\alpha * \beta \in A * B$ が保証される．このように円板四則演算は，四則演算結果の精度保証を可能にする．また，複素数と円板からなる四則演算は複素数を $Z = \langle c; 0\rangle$ とみなして演算を行う.

3 数列，円板列の収束次数

$z^* \in \mathbb{C}$ に収束する数列を $\{z_k\}_{k\ge0}$ とする．$e_k = |z_k - z^*|$ とすると，$\lim_{k\to\infty} e_k = 0$ である.

定義 3.1 $\{e_k\}_{k\ge0}$ が,

$$\limsup_{k\to\infty} e_k^{\frac{1}{k}} < 1 \tag{2}$$

を満たすとき，数列 $\{z_k\}_{k\ge0}$ は z^* に 1 次収束するという.

*1 [1] や [3] では Durand-Kerner 法と呼称されているが，この反復法は Weierstrass(1891) が最初に残した功績であるため，Weierstrass 法と呼んでいる.

定義 3.2 ある $p > 1$ に対し，$\{e_k\}_{k\ge0}$ が,

$$\limsup_{k\to\infty} e_k^{\frac{1}{p^k}} < 1 \tag{3}$$

を満たすとき，数列 $\{z_k\}_{k\ge0}$ は z^* に p 次収束するという.

円板列 $\{Z_k\}_{k\ge0}, Z_k = \langle c_k; r_k\rangle$ が $z^* \in Z_k$ $(k \ge 0)$ を満たし,

$$\lim_{k\to\infty} r_k = 0 \tag{4}$$

であるとき，$\{Z_k\}_{k\ge0}$ は z^* に収束するという.

定義 3.3 このとき，ある $p \ge 1$ について $\{r_k\}_{k\ge0}$ が零に p 次収束するとき，$\{Z_k\}_{k\ge0}$ は z^* に p 次収束するという.

収束次数 p が大きいほど，数列あるいは円板列の収束は急速である.

4 円板 Weierstrass 法

モニックな n 次複素多項式を次のように定める.

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \quad (a_i \in \mathbb{C}) \tag{5}$$

$P(z)$ の零点 ζ_i $(1 \le i \le n)$ は，すべて異なると仮定する．ある初期円板 $Z_i^{(0)} \ni \zeta_i$ $(1 \le i \le n)$ から初めて，$m \ge 0$ において,

$$Z_i^{(m+1)} = z_i^{(m)} - \frac{P(z_i^{(m)})}{\prod_{j=1, j\ne i}^{n}(z_i^{(m)} - Z_j^{(m)})} \quad (1 \le i \le n) \tag{6}$$

$$Z_i^{(m+1)} = z_i^{(m)} - \frac{P(z_i^{(m)})}{\prod_{j<i}(z_i^{(m)} - Z_j^{(m+1)}) \prod_{j>i}(z_i^{(m)} - Z_j^{(m)})} \quad (1 \le i \le n) \tag{7}$$

で円板列 $\{Z_i^{(m)}\} = \{\langle z_i^{(m)}; r_i^{(m)}\rangle\}$ を生成する方法を一斉更新 (6) 及び順次更新円板 Weierstrass 法 (7) という.

4.1 円板 Weierstrass 法の収束条件と収束速度

定理 4.1 一斉更新 (6) 及び順次更新円板 Weierstrass 法 (7) において，$r^{(m)} = \max_{1\le i\le n} r_i^{(m)}, d = \min_{1\le i\le n} |\zeta_i - \zeta_j|$ とおく．このとき，$Z_i^{(0)} \ni \zeta_i$ $(1 \le i \le n)$ と不等式

$$r^{(0)} < \frac{\log\frac{3}{2}}{n - 1 + 2\log\frac{3}{2}} d \tag{8}$$

が成り立てば, 任意の $m \ge 0$ において, $Z_i^{(m)} \ni \zeta_i$ $(1 \le i \le n)$ が成り立つ．また定数 $0 \le R < 1$ が存在し,

$$r_i^{(m+1)} \le R r_i^{(m)} \tag{9}$$

が成り立ち，円板列 $\{Z_i^{(m)}\}_{m\ge0}$ は零点 ζ_i $(1 \le i \le n)$ に収束する.

このことは，円板 Weierstrass 法の収束次数が 1 以上であることを示す．実際には，一斉更新円板 Weierstrass 法は 2 次収束する．一方，順次更新円板 Weierstrass 法の収束次数は $\lambda_M > 2$ である．ここで，λ_M は代数方程式

$$(\lambda - 1)^n - (\lambda - 1) - 1 = 0 \tag{10}$$

の 2 より大きい唯一の実解であり，不等式

$$\lambda_M > 2 + \frac{1}{2(n-1)} \tag{11}$$

を満たす．

5 Smith の定理による初期円板の生成法

定理 5.1 z_i $(1 \leq i \leq n)$ を相異なる複素数とする．このとき，モニックな n 次複素多項式 (5) のすべての根は閉円板

$$Z_i = \langle z_i\,;\, r_i \rangle, \quad r_i = n \left| \frac{P(z_i)}{\prod_{j \neq i}(z_i - z_j)} \right| \quad (1 \leq i \leq n) \tag{12}$$

の合併に含まれる．その連結成分の 1 つが m 個の閉円板からなれば，その中にちょうど m 個の根がある．

以下 Z_i を Smith 円板と呼ぶ．Smith 円板は近似根 z_i の精度保証となる．Smith 円板が円板 Weierstrass 法の収束条件 (8) を満たせば，円板 Weiestrass 法により改良できる．

6 C++ 円板演算システムによる数値実験

前節までの結果により，次のようなアルゴリズムが得られる．

Step1 $\underline{m = 0}$ 近似根 z_i $(1 \leq i \leq n)$ を適当に取る．

Step2 z_i $(1 \leq i \leq n)$ の Smith 円板 $Z_i = \langle z_i; r_i \rangle$ を生成．

Step3 Z_i $(1 \leq i \leq n)$ が円板 Weierstrass 法の収束条件 (8) を満たせば，Step5 へ，そうでないとき Step4 へ．

Step4 $\underline{m = m + 1}$ Weierstrass 法により近似根 z_i $(1 \leq i \leq n)$ を改良．Step2 へ．

Step5 Z_i $(1 \leq i \leq n)$ を初期円板として円板 Weierstrass 法を適用．丸め誤差限界まで反復を続行する．

このアルゴリズムに基づき，次のような数値実験を行った．

実験に使用したモニックな n 次複素多項式は

$$P(z) = z^3 + z^2 - 2 \tag{13}$$

である．この多項式の零点は $\zeta_1 = 1$, $\zeta_2 = -1 + i$, $\zeta_3 = -1 - i$ である．上記アルゴリズムの Step1 で近似根を $z_1 = 3.5$, $z_2 = -2.1 + 2.5i$, $z_3 = -4.2 - 3.9i$ と定めた．

アルゴリズムを実行すると，まず Step2, 3, 4 が繰り返された．m は Step4 の実行回数である．Step3 の条件判定は，$|\zeta_i - \zeta_j| \leq |z_i - z_j| - r_i - r_j$ $(i \neq j)$ により，

$$r < \frac{\log \frac{3}{2}}{n - 1 + 2\log \frac{3}{2}} d \tag{14}$$

$$r = \max_{1 \leq i \leq n} \operatorname{rad} Z_i, \quad d = \min_{i \neq j}\{|z_i - z_j| - r_i - r_j\} \tag{15}$$

で行った．m, r と収束条件 (8) を表 1 に示す．

表 1 Smith 円板の半径の推移データ

m	r	収束条件 (8)
0	5.66	FALSE
1	1.75	FALSE
2	0.93	FALSE
3	0.349	FALSE
4	0.0501	TRUE

$m = 4$ のとき，収束条件 (8) が満たされ，Step5 を実行した．Step5 では 4 回の反復を行い，次の結果を得た．

- $Z_1^{(4)} = \langle 1 - 2.7 \times 10^{-50} i\,;\, 4.9 \times 10^{-20} \rangle$
- $Z_2^{(4)} = \langle -1 + i\,;\, 0 \rangle$
- $Z_3^{(4)} = \langle -1 - i\,;\, 9.0 \times 10^{-20} \rangle$

3 つの零点について，$\zeta_i \in Z_i$ $(1 \leq i \leq 3)$ が成立しており，精度保証が成功した．円板 Z_i の半径は 9×10^{-20} 以下であり，きわめて精密な精度保証が達成されている．

7 おわりに

今回の研究によって，円板 Weierstrass 法の収束定理を確立することができた．この Petković[2] に勝る収束定理の獲得が，本研究の重要な成果の 1 つである．近似根を Weierstrass 法で計算し，それに Smith の定理を適用することにより円板 Weierstrass 法の初期円板を構成した．初期円板としての適切性は不等式 (8) で判定を行った．それを数回の反復で改良することにより，高精度な円板を生成することができた．ただし，現段階では 3 次多項式のごく簡素な一例を検証したに過ぎない．様々な多項式において定理の適用を変える等, 検証したいことは山のようにある．1 年間という研究期間は，私にとっては短すぎた．

参考文献

[1] 大嶽直幸: 代数方程式に対する同時反復法 -マルチロックオン系解法-，南山大学数理情報学部数理科学科卒業論文 (2008).

[2] Miodrag Petković: Iterative Methods for Simultaneous Inclusion of Polymonial Zeros, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-NewYork(1989).

[3] 山本哲朗: 数値解析入門 (増訂版)，サイエンス社 (2005).

[4] 油科亮太: 複素数円板演算システムの構築，南山大学大学院数理情報研究科修士論文 (2008).