為替リスクを考慮した変動利付債の評価について

2005MM077 高木義仁

指導教員：澤木勝茂

1　はじめに

今日の日本では銀行に資産を預け資産を増やすことは容易ではない．そこで最近注目されるようになったのが外貨建て債券である．本研究では外貨建て債券に対して掛る為替リスクを考慮した変動利付債について評価をおこなう．また，ある企業の国と日本との間の為替レートが存在しない場合，その国の通貨を日本円に変換するには一度ドルに変換することで確実に変換することができる．それにより間接的な為替取引が可能となる．本研究ではある国の通貨から円へ変換する為替レートの市場はないものとする．

2　2 通貨モデルの定式化

連続時間モデルの場合，時刻 t での為替 X_t^{AB}，X_t^{BC} が確率微分方程式

$$dX_t^{AB} = \mu_{AB}X_t^{AB}dt + \sigma_{AB}X_t^{AB}dW_t^{AB}, \qquad (1)$$

$$dX_t^{BC} = \mu_{BC}X_t^{BC}dt + \sigma_{BC}X_t^{BC}dW_t^{BC} \qquad (2)$$

にしたがうとする．ただし，μ_{AB}，μ_{BC} はそれぞれの為替の平均，σ_{AB}，σ_{BC} はそれぞれの為替のボラティリティ，W_t^{AB}，W_t^{BC} はそれぞれの時刻 t での標準ブラウン運動である．このとき，満期を T，額面価格を F，クーポンを C とし償還はないという仮定の下で債券の満期 T でのペイオフは

$$\left(C + FX_T^{AB}\right)X_T^{BC} \qquad (3)$$

で与えられる．したがって，クーポンは満期において 1 回のみなので，$t=0$ でのこの債券の価格 $V(X_0^{AB}, X_0^{BC}, 0)$ は上記のペイオフを利子率 r で割り引いて，リスク中立確率において期待値をとったものであるので

$$V(X_0^{AB}, X_0^{BC}, 0) = e^{-rT}E\Big[\Big(C + FX_T^{AB}\Big)X_T^{BC}\Big] \qquad (4)$$

となる．

3　クーポン支払が満期において 1 回限りの変動利付債

クーポンを満期において 1 回と額面価格を受け取る変動利付債の価格評価をおこなう．ここで確率変数 Z [1]，H を

$$Z = \sigma_{BC}\tilde{W}_T^{BC} - \frac{1}{2}\sigma_{BC}^2 T, \qquad (5)$$

$$\begin{aligned} H = &\left(\sigma_{AB}X_0^{BC} + \sigma_{BC}X_0^{AB}\right)\tilde{W}_T \\ &-\sigma_{BC}X_0^{AB}W_T^{AB} - \sigma_{AB}X_0^{BC}W_T^{BC} \end{aligned} \qquad (6)$$

とおくと，Z はリスク中立確率の下で正規分布にしたがう確率変数であり，H はリスク中立確率の下で 2 次元正規分布にしたがう確率変数である．ただし，$\tilde{W}_T^{BC}$，$\tilde{W}_T$ はそれぞれリスク中立確率の下での標準ブラウン運動である．したがって ρ をそれぞれの為替の相関係数とすると

$$\begin{aligned} V\left(X_0^{AB}, X_0^{BC}, 0\right) &= e^{-rT}E\left[\left(C + FX_T^{AB}\right)X_T^{BC}\right] \\ &= CX_0^{BC}\Phi\left(d_1\right) + FX_0^{AB}X_0^{BC}\Phi_2\left(d_2, d_3, \rho\right) \end{aligned} \qquad (7)$$

となる．ただし，$\Phi(x)$ は標準正規分布の分布関数であり，$\Phi_2(y,z,\rho)$ は 2 次元標準正規分布の分布関数である．また

$$d_1 = -\frac{1}{2}\sigma_{BC}\sqrt{T}, \qquad (8)$$

$$d_2 = -\frac{\sigma_{BC}X_0^{AB}T}{\sigma_{AB}X_0^{BC}\sqrt{T}}, \qquad (9)$$

$$d_3 = -\frac{\sigma_{AB}X_0^{BC}T}{\sigma_{BC}X_0^{AB}\sqrt{T}} \qquad (10)$$

である．ここで具体的な数値を用いて解析的性質を考察する．なお，ここで用いる数値は $X_0^{AB}=100$，$X_0^{BC}=100$，$\sigma_{AB}=0.10$，$\sigma_{BC}=0.10$，$C=0.0688$，$T=1$，$F=1$，$\rho=0.99$ とする．為替レート X_0^{BC} の変化による価格 $V(X_0^{AB}, X_0^{BC}, 0)$ の変化度合を図 1 で表す．

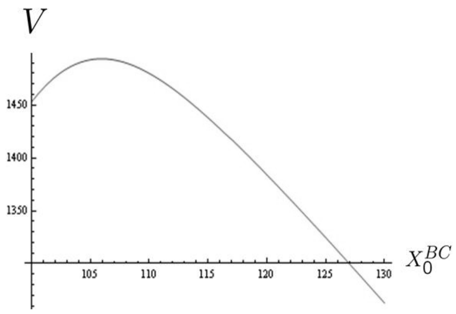

図 1　V のグラフ

X_0^{BC} の値が高いほど価格式の第 2 項部分の負の要素が大きくなる．またその部分は全体的に占める割合が多いので，値が高くなれば高くなるほど価格は低くなる．

4　クーポンが複数回ある変動利付債

クーポンを残存期間中のクーポン支払い日に複数回，そして満期においてクーポンと額面価格を受け取る変動利付債の価格評価をおこなう．クーポン支払い日は $t_c(<T)$ とし，クーポンは残存期間中の利払いに 1 回と満期においての合計 2 回ある場合の価格式を導出する．価格式は

$$\begin{aligned} V_2(X_0^{AB}, X_0^{BC}, 0) &= e^{-rt_c}CE\left[X_{t_c}^{BC}\right] \\ &\quad + e^{-rT}E\Big[\left(C + FX_T^{AB}\right)X_T^{BC}\Big] \\ &= CX_0^{BC}\Phi\left(d_4\right) + CX_0^{BC}\Phi\left(d_1\right) \\ &\quad + FX_0^{AB}X_0^{BC}\Phi_2\left(d_2, d_3, \rho\right), \end{aligned} \qquad (11)$$

$$d_4 = -\frac{1}{2}\sigma_{BC}\sqrt{t_c} \qquad (12)$$

となる．よってクーポンが n 回の場合の価格式は

$$V_n(X_0^{AB}, X_0^{BC}, 0) = CE\left[\sum_{i=1}^{n} e^{-rt_i} X_{t_i}^{BC}\right] + e^{-rT} FE\left[X_T^{AB} X_T^{BC}\right] \quad (13)$$

となる．

5　為替レートに応じてクーポン率が変化する2通貨モデルの定式化

連続時間モデルの場合，時刻 t での為替 X_t^{BC} が確率微分方程式

$$dX_t^{BC} = rX_t^{BC}dt + \sigma_{BC} X_t^{BC} d\tilde{W}_t^{BC} \quad (14)$$

にしたがうとする．ただし，r は利子率である．このとき，満期を T，額面価格を F，指定の閾値を K，クーポンを $\tilde{C}$ とする．$\tilde{C}$ は $X_T^{BC} \geq K$ の場合 αF，$X_T^{BC} < K$ の場合 βF(ただし，$1 > \alpha > \beta > 0$) である．また償還はないという仮定の下で債券の満期 T でのペイオフは

$$\left(\tilde{C} + FX_T^{AB}\right) X_T^{BC} \quad (15)$$

で与えられる．したがって，クーポンは満期において1回のみなので，$t = 0$ でのこの債券の価格 $\tilde{V}(X_0^{AB}, X_0^{BC}, 0)$ は上記のペイオフを利子率 r で割り引いて，リスク中立確率において期待値をとったものであるので，

$$\begin{aligned}\tilde{V}\ (X_0^{AB}, X_0^{BC}, 0) &= e^{-rT} E\left[\left(\tilde{C} + FX_T^{AB}\right) X_T^{BC}\right] \\ &= e^{-rT} E\Big[\alpha F X_T^{BC} 1_{\{X_T^{BC} \geq K\}} \\ &\quad + \beta F X_T^{BC} 1_{\{X_T^{BC} < K\}} + FX_T^{AB} X_T^{BC}\Big] \end{aligned} \quad (16)$$

となる．

6　為替レートに応じてクーポン率が変化し，クーポン支払が満期において1回限りの変動利付債

(14) 式を解き，3節と同様に計算していくと

$$\begin{aligned}\tilde{V}\ (&X_0^{AB}, X_0^{BC}, 0) \\ &= e^{-rT} E\Big[\alpha F X_T^{BC} 1_{\{X_T^{BC} \geq K\}} \\ &\quad + \beta F X_T^{BC} 1_{\{X_T^{BC} < K\}} + FX_T^{AB} X_T^{BC}\Big] \\ &= FX_0^{BC}\left\{\alpha\Phi(d_5) + \beta\Phi(-d_5)\right\} \\ &\quad + FX_0^{AB} X_0^{BC} \Phi_2\left(d_2, d_3, \rho\right), \end{aligned} \quad (17)$$

$$d_5 = \frac{\log\left(\frac{X_0^{BC}}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma_{BC}^2\right) T}{\sigma_{BC}\sqrt{T}} \quad (18)$$

である．ここで具体的な数値を用いて解析的性質を考察する．なお，ここで用いる数値は $X_0^{AB} = 100$，$X_0^{BC} = 100$，$\sigma_{AB} = 0.10$，$\sigma_{BC} = 0.10$，$r = 0.0688$，$T = 1$，$F = 1$，$K = 105$，$\alpha = 0.10$，$\beta = 0.001$，$\rho = 0.99$ とする．為替レート X_0^{BC} の変化による価格 $\tilde{V}(X_0^{AB}, X_0^{BC}, 0)$ の変化度合を図2で表す．

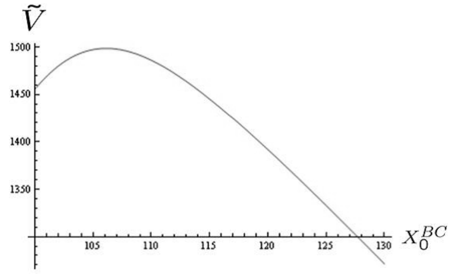

図2　$\tilde{V}$ のグラフ

指定の閾値を超えれば高いクーポンがもらえるが，同時に価格式の第3項部分の負の要素が大きくなるので価格が低くなる．だが，クーポン率が一定の V と比べると全体的に価格は高くなっている．

7　クーポンが複数回あるクーポン率が変化する変動利付債

クーポン支払い日は $t_c (< T)$ とし，クーポンは残存期間中の利払いに1回と満期においての合計2回ある場合の価格式を導出する．価格式は

$$\begin{aligned}\tilde{V}_2\ (&X_0^{AB}, X_0^{BC}, 0) = e^{-rt_c} E\Big[\alpha F X_{t_c}^{BC} 1_{\{X_{t_c}^{BC} \geq K\}} \\ &+ \beta F X_{t_c}^{BC} 1_{\{X_{t_c}^{BC} < K\}}\Big] + e^{-rT} E\Big[\alpha F X_T^{BC} 1_{\{X_T^{BC} \geq K\}} \\ &+ \beta F X_T^{BC} 1_{\{X_T^{BC} < K\}} + FX_T^{AB} X_T^{BC}\Big] \\ = &FX_0^{BC}\left\{\alpha\Phi(d_6) + \beta\Phi(-d_6)\right\} + FX_0^{BC}\left\{\alpha\Phi(d_5)\right. \\ &\left. + \beta\Phi(-d_5)\right\} + FX_0^{AB} X_0^{BC} \Phi_2\left(d_2, d_3, \rho\right), \end{aligned} \quad (19)$$

$$d_6 = \frac{\log\left(\frac{X_0^{BC}}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma_{BC}^2\right) t_c}{\sigma_{BC}\sqrt{t_c}} \quad (20)$$

となる．よってクーポンが n 回の場合の価格式は

$$\begin{aligned}&\tilde{V}_n(X_0^{AB}, X_0^{BC}, 0) \\ &= FE\left[\sum_{k=1}^{n} e^{-rt_k}\left\{\alpha X_{t_k}^{BC} 1_{\{X_{t_k}^{BC} \geq K\}}\right.\right. \\ &\quad \left.\left. + \beta X_{t_k}^{BC} 1_{\{X_{t_k}^{BC} < K\}}\right\}\right] + e^{-rT} FE\left[X_T^{AB} X_T^{BC}\right] \end{aligned} \quad (21)$$

となる．

8　おわりに

本研究では，クーポン支払いが1回の変動利付債，クーポン支払いが2回の変動利付債，為替レートに応じてクーポン率が変化しクーポン支払いが1回の変動利付債，為替レートに応じてクーポン率が変化しクーポン支払いが2回の変動利付債について価格評価をおこなった．クーポン回数が1回と2回の両方でクーポン率が一定よりも変化したほうが良いよという結果になった．これは指定の閾値 K の値を超えることによりクーポン率が変化し，より多くのクーポンがもらえるということから説明できる．だがクーポン率を変化させる場合，指定の閾値 K をどのように設定するかが重要であるといえる．

参考文献

[1] ドージェ・ブローディ：『現代ファイナンス数理』，日本評論社，2000.