

うそとパラドックス

2005MM056 太田正義

指導教員：佐々木克巳

1 はじめに

私は数理論理学を研究していく中でパラドックスについて興味を持った。本研究では内井 [1] で紹介されている問題を解き、簡単な解法を発見することを目的とする。具体的には、真理値表を用いた方法、および小野 [2] で紹介された解法を考える。本稿では、小野 [2] の方法を3節以降で扱う。

2 問題

この節では、内井 [1] の問題に対し、内井 [1] による解答と、真理値表による解答を述べる。本研究では15の問題を取り上げたが、本稿ではそのうちの1つを述べる。

問題 (内井 [1])

次の2つの文から何が結論できるか。

「いかなる正直者もごまかしはしない」

「不正直な人はだれも信用されない」

内井 [1] による解答

詳細は省略するが、「ごまかす人はだれも信用されない」(そして「正直者ではない」)と結論できる。

真理値表を用いた解答

「正直者」を p 、「ごまかす人」を q 、「信用される者」を r とすれば、2つの文はそれぞれ、 $p (\neg q)$ 、 $(\neg p) (\neg r)$ となる。それらの真理値表は次のようになる。

p	q	r	$p (\neg q)$	$(\neg p) (\neg r)$
T	T	T	F	T
T	T	F	F	T
T	F	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	F
F	T	F	T	T
F	F	T	T	F
F	F	F	T	T

よって、2つの文を真とする (p, q, r) の値の取り方は、 (T, F, T) 、 (T, F, F) 、 (F, T, F) 、 (F, F, F) の4通りであることが分かった。内井 [1] の解答は、この4通りに加え、 (F, F, T) という取り方も可能性に残っている。

3 小野 [2] の解法を用いた例

この節では、内井 [1] の問題に対し、2節の2種類の解答に加え、小野 [2] の解法による解答も述べる。

小野 [2] の解法とは、あるAの発言に対して、Aが正直者(または「Aの発言」が真)であることと、Aの発言の内容が真であるということが同値であるということから、解を求める解法である。ただし、正直者とは常に本当のことを言う者のことで、うそつきとは常にうそをつ

く者のこととし、正直者とうそつき以外の者はいないとする。本研究では5つの問題を取り上げたが、ここではそのうちの2つを述べる。

問題1 (内井 [1])

次のA、Bの証言から何が結論できるか。

A 「Bの文は偽である」

B 「Aの文は真である」

内井 [1] による解答

もし、Bの内容が真ならば、「Aの文は真である」となるので、「Bの文は偽である」、つまりBの内容は偽となる。ところが、Bの内容が偽ならば、「Aの文は偽である」となるので、「Bの文は真である」、つまり、Bの内容は真となり、Bは真かつ偽であり矛盾である。

真理値表を用いた解答

「Aの文は真である」を a 、「Bの文は真である」を b とする。問題文より

$$a (\neg b) \dots(1)$$

$$(\neg a) b \dots(2)$$

$$b a \dots(3)$$

$$(\neg b) (\neg a) \dots(4)$$

の4つが成り立つ。一方、(1)~(4)の真理値表は次のようになる。

a	b	(1)	(2)	(3)	(4)
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	T	F
F	T	T	T	F	T
F	F	T	F	T	T

よって(1)~(4)をすべて真にする場合はない。これは、(1)~(4)がすべて成り立つことに矛盾する。

小野 [1] の解法による解答

A、Bそれぞれの文が真であることをA、Bとすると問題文より

$$A \equiv (\neg B) \dots(1)$$

$$B \equiv A \dots(2)$$

が成り立つ。(1)を(2)に代入して

$$B \equiv (\neg B)$$

よって、矛盾である。

問題2 (内井 [1])

ダイタイ航空機爆破不時着事件は、乗客のA、Bのいずれかが手投げ弾をいじくって爆発させたために起きたことが明らかになった。取調べに対し、Bは

「Aの言うことはうそである。」

と言い続けた。これに対し、Aは

「Bの言うことは本当であり、Bが犯人である。」

と言って譲らなかつた。さて、どちらが犯人であろうか。

内井 [1] による解答

詳細は省略するが「Aが犯人で、かつBが犯人でない」と結論される。

真理値表を用いた解答

A、Bそれぞれが犯人であることを a、b とおき、また、A、B それぞれの証言が真であることを、 とおくと、

$$(\neg a) \dots(1)$$

$$(\neg b) \dots(2)$$

$$(a \wedge b) \dots(3)$$

$$(\neg a) \wedge (\neg b) \dots(4)$$

という4つが成り立つ。また、問題文の「A、Bのいずれかが」という条件から、

$$(a \vee b) \dots(5)$$

が成り立つ。これら真理値表は次の通りである。

a	b	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
T	T	F	T	T	T	T
T	T	T	F	F	F	F
T	T	F	T	T	F	T
T	F	T	T	F	T	T
T	T	F	F	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T
F	T	T	F	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	T	T	F	T	F
F	T	F	F	T	T	T
F	F	T	F	T	T	F
F	F	F	T	T	T	F
F	F	F	F	T	T	F

よって、(1)~(4)をすべて真にする(a, b, ,)の値の取り方は、(T, F, F, T)の1通りであり、「Aが犯人で、かつBが犯人でない」と結論できる。また、Aの証言は偽であり、Bの証言は真であると言える。

小野[2]の解法による解答

A、Bそれぞれが犯人であることを a、b とすると、問題文中の「A、Bのいずれかが」という条件から、

$$(a \vee b) \dots(1)$$

が成り立つ。

また、A、B それぞれの証言が真であることを、 とする。すると、

$$\equiv (a \wedge b) \dots(2)$$

$$\equiv (\neg a) \dots(3)$$

となり、(3)を(2)に代入して

$$\equiv (\neg a) \wedge b \dots(4)$$

である。ここで a を真と仮定すると $\neg a$ は偽となり、(4)は次のいずれかになる。

$$T \equiv F \wedge T \dots \text{矛盾}$$

$$T \equiv F \wedge F \dots \text{矛盾}$$

つまり、bの真偽に関わらず、(4)の右辺は偽となり矛盾する。よって、背理法により a は偽であると導かれる。

a が偽であるので $\neg a$ は真となり (4) は次のいずれかになる。

$$F \equiv T \wedge T \dots \text{矛盾}$$

$$F \equiv T \wedge F \dots \text{成立}$$

よって、(4)を成立させるにはbは偽でなければならない。以上より、(1)の事実と合わせて「aで、かつbでない」と結論される。

4 小野[2]の解法を適用できない例

この節では、小野[2]の解法を適用できない問題を紹介する。本研究では3つの問題を取り上げたが、本稿ではそのうちの1つを述べる。

問題(内井[1])

Aは次のように言ったが、何がわかるか。ただし、正直者とうそつきと、そのどちらでもない者がいるとする。

「わたしはうそつきではないか正直者であるか、どちらかである。もしわたしが正直者なら、わたしはうそつきである」

小野[2]の解法による解答

Aが、正直者でもうそつきでもない場合が考えられる。つまり、正直者の否定がうそつきにならず、また、うそつきの否定も正直者にならない。したがって、小野[2]の解法は適用できない。

真理値表を用いた解答

「Aは正直者である」を a、「Aはうそつきである」を b とすると、Aの証言は

$$((\neg b) \vee a) \dots(1)$$

$$(a \wedge b) \dots(2)$$

の2つで表すことができるので、問題文より

$$a \equiv ((1) \wedge (2)) \dots(3)$$

$$b \equiv ((\neg(1)) \wedge (\neg(2))) \dots(4)$$

が成り立つ。すると、(3)と(4)の真理値表は次のようになる。

a	b	(3)	(4)
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	T

よって、(3)と(4)を真にする(a, b)の値の取り方は、(F, F)の1通りであり、「aでなく、かつbでない」と結論できる。また、Aの証言から、Aの言った文は真であると言える。

5 おわりに

本研究により、いくつかの問題では、内井[1]の解答より、真理値表を用いた解答の方が、より正確な結果を導くことが分かった。また、小野[2]の解法を用いることによって、より簡単に解けるものもあることも分かった。

参考文献

[1] 内井惣七：『うそとパラドックス』。講談社現代新書，1987。
 [2] 小野寛晰：『情報科学における論理』。日本評論社，1994。