メディアン問題
—枝上に重みがある場合のメディアン配置—

2005MM050 成田翔一
指導教員：鈴木敦夫

1　はじめに

施設を特定の地域にどのように配置すれば最もよいかという問題は古くから考えられ、多くの研究がなされている。特定の地域内の利用者にとっては近ければ近いほど利便度は高くなり、近い人が多ければ多いほど良い施設配置となるのではないかと考える。

実際に存在する社会問題に対してオペレーションズリサーチを用いて解決するにあたり、社会に存在する様々な要因すべてを考慮するのではなく数理モデルを作成して、有用な解答を導きだす。

本研究の目的は道路に沿って人口が分布している実際問題を、１つの配置問題のモデルとして考え、その解法を導きだすことである。具体的には木状のネットワーク上にメディアンを配置する問題を考える。従来のメディアン問題は点上のみに人口などの重みが存在し、ハキミの定理より点上にのみメディアンが配置されてきた。本研究では枝上にも重みが存在する場合を考え、この場合はハキミの定理が成立しなくなり、枝上にもメディアンが配置される可能性を考慮に入れて解法を導き出す。

2　基本モデル

基本的なモデルとして、２点間のメディアン配置モデルを図１に示す。h_1 と h_2 を人口の重みがある点と考える。h_1 から h_2 間の距離を１とし、h_1 から h_2 間の枝上に一様に h_{12} という人口が分布していると考える。

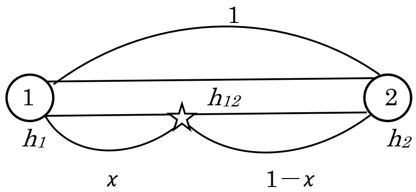

図１ :点数２、枝数１のモデル

2.1　記号の定義

以下に記号を定義する。

h_i	: 点 i の人口
h_{ij}	: 点 i と点 j 間の人口 (枝上の人口)
x	: 変数 ($0 \le x \le 1$)
$F(x)$	: メディアンが x の場合の総移動距離
L	: 枝の長さ

2.2　目的関数

以下に目的関数を定義する。$F(x)$ は利用者とメディアンまでの移動距離の積の総和である。$F(x)$ が最小値をとるときの x がメディアンの配置場所となる。ここでは枝の長さを１と考える。最終的には $F(x)$ を最小とする x の値と L の積がメディアンとなる。

$$F(x) = h_1 x + h_2(1-x) + x h_{12}\frac{x}{2} + (1-x)h_{12}\frac{(1-x)}{2}$$

$$= h_{12}\{(x + \frac{h_1 - h_2 - h_{12}}{2h_{12}})^2 + \frac{1}{2} + \frac{h_2}{h_{12}} - \frac{(h_1 - h_2 - h_{12})^2}{4{h_{12}}^2}\}$$

2.3　重みの関係性

以下に点上と枝上の重みがメディアンの配置においてどのような関係性をもつかを簡単に示す。
目的関数において $x + \frac{h_1-h_2-h_{12}}{2h_{12}}$ がメディアンの座標となり $0 < -\frac{h_1-h_2-h_{12}}{2h_{12}} < 1$ である。
変形すると $-h_{12} < h_2 - h_1 < 0$ となり $0 < h_2 - h_1 < h_{12}$ となる。この式が枝上にメディアンが配置される条件となる。$h_1 = h_2$ の場合 $x = 0.5$ となりいかなる h_{12} でも枝の中央にメディアンが配置される。また $h_1 + h_{12} \le h_2$ の場合、$x = 1$ となり h_2 の点上に配置される。$h_2 + h_{12} \le h_1$ の場合、$x = 0$ となり h_1 の点上に配置される。

3　木状のネットワークモデル

３章では例として下に示すような木状のネットワークの点上と枝上に重みのある場合のモデルに Goldman-like procedure[3] を用いてメディアンを点上もしくは枝上に配置する手法を示す。重みの総和は全ての点と枝合わせて１となっている。また枝上での表記は length/weight とする。

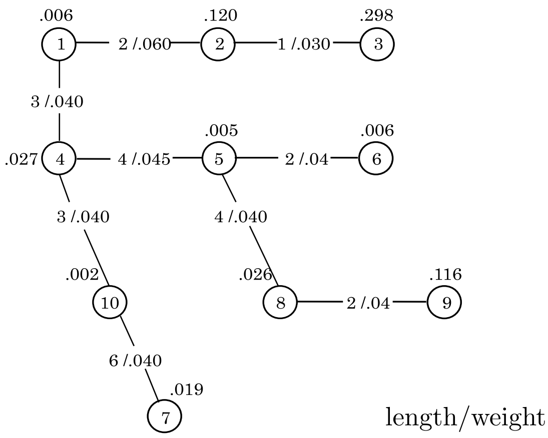

図２ :木状のネットワークモデル

3.1　解法

Goldman-like procedure[3] の概要を説明する。葉のノード i を選択する。ノード i の重みが 1/2 以上であればノード i がメディアンとなる。1/2 より小さければノード i の重みと隣接するノード j の重みとノード j を結ぶ枝の重みの和を求める。この和を $w(j|i)$ で表す。例えば図２で $w(8|9)$ は $h_9 + h_{89}$ である。そして $w(j|i)$ が 1/2 より小さければノード j を $h_j + w(j|i)$ に更新する。そしてノー

ド j とノード j とノード j を結ぶ枝を削除する。この手順を繰り返し、$h_i < 1/2$ かつ $h_i + h_{ij} > 1/2$ となったときメディアンはノード i とノード j の間に配置される。

図２の例で、算法が進み、図３のようになり、その後図４，５を経て最終的に図６になる様子を以下に示す。

図２から図３: 点５、６、８、９の重みとそれらを結ぶ枝の重みを点４に
ノード４の更新 $h_4 \to 0.345$(図 3 参照) が行われる。
図３から図４:
点７、１０の重みとそれらを結ぶ枝の重みを点４に
ノード４の更新 $h_4 \to 0.446$ (図 4 参照) が行われる。
図４から図５:
ノード４を選択

$$w(4|1) = 0.486 < 1/2$$

ノード１の更新 $h_1 \to 0.492$ (図 5 参照) が行われる。
ノード３を選択
図５から図６:

$$w(3|2) = 0.552 > 1/2$$

ノード２の更新 $h_2 \to 0.448$ (図 6 参照) が行われる。

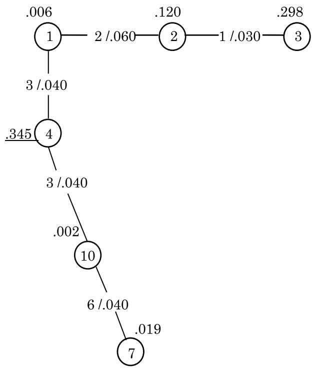

図３ :

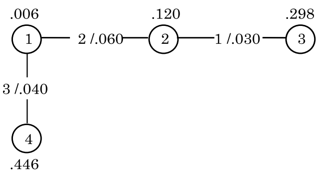

図４ :

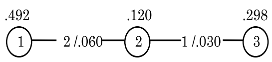

図５ :

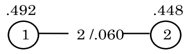

図６ :

以上よりメディアンの配置場所は点１と点２間の枝上とわかった。
次に上記について目的関数を計算し最小値を求める。

目的関数が最小値となるのは $x = 0.1333$ となり、メディアン配置場所は $x \times L$ より点１から距離 0.2667 の枝上となった。

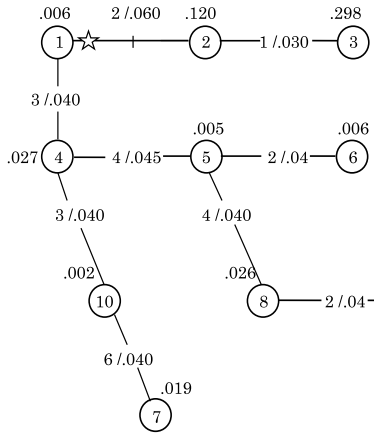

図７ :メディアンの配置場所

4　おわりに

これらの結果より今まで点上に配置されてきたメディアンが枝上にも配置されることがわかった。枝上に重みがあることでハキミの定理 [3] が成り立たず点に近いものの、枝上にメディアンが配置された。例外として枝上の重みの値が大きくなればメディアンは枝の中央に配置された。

この問題のプログラムをＣ言語で作成しいくつかの例を解いた。

今回取り上げたのは点が１０個、枝９本の木状のネットワークモデルに対して施設１つの配置であった。今後の課題としては一般のネットワークに対してと、木状でも施設を複数配置する場合の検討がある。

参考文献

[1] 岡部篤行, 鈴木敦夫, 最適配置の数理, 朝倉書店, 1992.

[2] 大山崇のハキミ問題のページ, http://www.nirarebakun.com/graph/haki.html

[3] Hakimi, S. L.(1964). Optimum distributions of switching centers in a communication network and some related graph theoretic problems, *Operations Research*, Vol. 13, pp. 462-475.

[4] Samuel S. Chiu (1987). The Minisum Location on Undirected Network with Continuous Link Demands, *Computers & Operations Research*, Vol. 14, No.5, pp. 369-383.