様相論理と内包論理

2005MM043 水谷京平
指導教員：佐々木克巳

1　はじめに

様相論理は純粋に哲学的な考察から生まれた。私はその解釈が今日、言語学の意味論、プログラムの仕様の記述や正当性の証明、そして人工知能論などにおいて広く応用されるようになってきているという歴史的経緯を知り、興味を持ったことが研究の動機である。

本研究では、小野 [1] にしたがって、正規な様相論理を理解し、クリプキによるセマンティクスを与え、完全性を示す。また様相演算に対しさまざまな解釈を与え、その解釈から得られる論理体系について述べる。

2　様相論理の導入

古典論理を様相演算を用いて拡張し、その推論形式の分析のために様相論理を導入する。

様相演算

1) 必然的に A である

ことを、記号 $\Box$ を使って $\Box A$ と表す。

2) A である可能性がある

ことを、記号 $\Diamond$ を使って $\Diamond A$ と表す。これは、$\neg\Box\neg A$ に同値である。

これらの $\Box$ や $\Diamond$ を様相演算という。

様相論理には数多くの体系があるが、ここでは正規な様相論理だけを考えていく。そして、もっとも基本的な様相論理である K の体系を導入する。

定義 2.1

1) それぞれの命題変数は論理式である。
2) A, B がともに論理式ならば、$(A\wedge B)$、$(A\vee B)$、$(A\supset B)$、$(\neg A)$、$(\Box A)$ はいずれも論理式である。

定義 2.2

体系 K は古典命題論理の sequent 計算の体系 LK に、さらに $\Box$ に関する次の推論規則をつけ加えたものである。

$$\frac{\Gamma\to A}{\Box\Gamma\to\Box A}(\Box)$$

ただし、Γ は論理式の有限列であり、Γ が $B_1,\cdots,B_m$ のとき $\Box\Gamma$ は $\Box B_1,\cdots,\Box B_m$ を表すものとする。

推論規則として $(\Box)$ を含むような様相論理を正規な様相論理という。

この正規な様相論理を具体的に定義するために、いくつかの論理式の型 $X_1,\cdots,X_k$ に対し、始式として

$$\to X_i \qquad (i=1,\cdots,k)$$

をつけ加えるということを行う。このようにして定義される様相論理を $\mathrm{K}X_1\cdots X_k$ と表す。また、$X_1,\cdots,X_k$ をこの様相論理の公理型という。

代表的な公理型をいくつかあげておく。

T：$\Box A\supset A$
4：$\Box A\supset\Box\Box A$
B：$A\supset\Box\Diamond A$
5：$\Diamond A\supset\Box\Diamond A$

これらの公理型 T,4,B,5 はそれぞれ双対なつぎの公理型でおきかえることができる。

T*：$A\supset\Diamond A$
4*：$\Diamond\Diamond A\supset\Diamond A$
B*：$\Diamond\Box A\supset A$
5*：$\Diamond\Box A\supset\Box A$

今後、様相論理 KT4 および KT5 は、それぞれ S4 および S5 とよぶことにする。

3　クリプキによるセマンティクス

この節ではクリプキによる様相論理のセマンティクスの説明を与える。そのセマンティクスはつぎに述べるクリプキ・フレームにより定められる。

3.1　クリプキ・フレーム

定義 3.1

空でない集合 M と M 上の二項関係 R の対 (M,R) を、様相論理に対するクリプキ・フレームという。M および R をそれぞれこのクリプキ・フレームの可能世界の集合および到達可能関係という。

3.2　クリプキ・モデル

定義 3.2

(M,R) をフレームとする。また V を各命題変数 p に対し $V(p)\subseteq M$ となるような写像とする。このとき、V をフレーム (M,R) 上の付値という。そして、この 3 つ組 (M,R,V) をクリプキ・モデルという。与えられたクリプキ・モデル (M,R,V) に対し、M の要素と論理式の間の二項関係 $\models$ をつぎのように帰納的に定義する。

1) $a\models p \iff a\in V(p)$ 　　(p は命題変数)
2) $a\models A\wedge B \iff a\models A$ かつ $a\models B$
3) $a\models A\vee B \iff a\models A$ または $a\models B$
4) $a\models A\supset B \iff a\models A$ でないか、または $a\models B$
5) $a\models\neg A \iff a\models A$ でない
6) $a\models\Box A \iff aRb$ となるすべての b に対し $b\models A$

$a\models A$ であるとき、「(可能世界)a で A は真である」という。「$a\models A$ でない」ことは $a\not\models A$ と表す。5) と 6) より

7) $a\models\Diamond A \iff aRb$ となるある b に対し $b\models A$

がなりたつ。関係 $\models$ は付値 V から一意的に定まるので、今後は V と $\models$ を同一視して、$\models$ のことを付値といったり、$(M,R,\models)$ のことをクリプキ・モデルといったりする。

3.3 恒真な論理式

定義 3.3

フレーム (M, R) 上の任意の付値 $\models$ と M の任意の要素 a に対して $a \models A$ となるとき、論理式 A は (M, R) で恒真であるという。クリプキ・モデル (M, R) において、ある $b(\in M)$ に対し $b \not\models A$ となるとき、$(M, R, \models)$ で論理式 A は偽であるという。またある付値 $\models$ に対し、A が $(M, R, \models)$ で偽であるとき、A はフレーム (M, R) で偽であるという。

クリプキのセマンティクスをより理解するために、例えば論理式 $\Box(\Box p \supset q) \vee \Box(\Box q \supset p)$ が偽になるようなクリプキ・モデル $(M, R, \models)$ を求めることにする (小野 [1] 問 4.8)。いま $a \in M$ に対し $a \not\models \Box(\Box p \supset q) \vee \Box(\Box q \supset p)$ であるとする。すると

1) $a \not\models \Box(\Box p \supset q)$
2) $a \not\models \Box(\Box q \supset p)$

でなければならない。1) と 2) より

1′) aRx となるある x に対し、xRy となるようなすべての y について $y \models p$ かつ $x \not\models q$
2′) aRv となるある v に対し、vRw となるようなすべての w について $w \models q$ かつ $v \not\models p$

がなりたたなければならない。逆に、$a \in M$ が、$1'), 2')$ をみたすと、$a \not\models \Box(\Box p \supset q) \vee \Box(\Box q \supset p)$ である。そこで、M として集合 $\{a, b, c\}$ をとり R は aRa,bRb,cRc,aRb,aRc のみがなりたち、さらに $x \models p$ がなりたつのは $x = b$、$x \models q$ がなりたつのは $x = c$ のみとする。このとき $1'), 2')$ がなりたつから、与えられた論理式を偽にできる。このクリプキ・モデル $(M, R, \models)$ はつぎの図 1 のように表現される。ただし関係 R を矢印で表すことにして、反射的である点、すなわち aRa となる点 a は矢印を書く代わりに $\circ$ で表す。

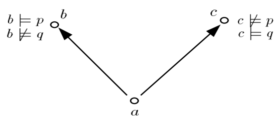

図 1 論理式 $\Box(\Box p \supset q) \vee \Box(\Box q \supset p)$ が偽になるようなクリプキ・モデル

3.4 到達可能関係

定理 3.1

任意のフレーム (M, R) に対しつぎのことがなりたつ。

1) Tが (M, R) で恒真 $\Longleftrightarrow$ R は反射的
2) 4が (M, R) で恒真 $\Longleftrightarrow$ R は推移的
3) Dが (M, R) で恒真 $\Longleftrightarrow$ R は継続的
4) Bが (M, R) で恒真 $\Longleftrightarrow$ R は対称的
5) 5が (M, R) で恒真 $\Longleftrightarrow$ R はユークリッド的

なお本研究では、定理 3.1 の 1) から 5) のすべてにおいて定義 3.2 をもとに証明を与えた (この証明は小野 [1] では与えられていない)。

4 健全性と完全性

定理 4.1 (フレームに関する完全性)

任意の式 $\Gamma \rightarrow \Delta$ に対し、$\Gamma \rightarrow \Delta$ が様相論理 K,S4,S5,KT,KTB で証明可能となるための必要十分条件は $\Gamma \rightarrow \Delta$ が各々のフレームで恒真となることである。

定理 4.1 において、必要性 (健全性) は定理 3.1 と論理式の構成に関する帰納法により、次の 1),2) を証明すれば示される。

1) 任意の始式は恒真である。
2) それぞれの推論規則において上式が恒真ならば、下式も恒真である。

また十分性 (完全性) を示すために様相論理 K,S4,S5,KT,KTB のそれぞれに対し、そのカノニカルなクリプキ・モデルを定義した。そのために、論理式の二つの集合の対に対して L で極大無矛盾という概念を定義した。本研究では、小野 [1] での定理 4.1 の証明を補い、その証明をまとめた。

5 内包論理

正規な様相論理では論理式 $\Box A$ を「必然的に A」と解釈したが、このほかにもいろいろな解釈が可能であり、その解釈に応じてその解釈の下での $\Box$ の固有な論理的性質とともにこれらの解釈の多くのものに対して共通な性質が研究されている。様相論理の周辺にあるこれらの論理は総称して内包論理とよぶ。ここでは、本研究でとりあげたいくつかの内包論理のうち、時間論理について述べる。

時間論理では様相演算 $\Box$ を時間的な意味での「いつも」と解釈することに話を限定する。実際には、より細かい議論を行うために、二つの様相演算 $[P]$ と $[F]$ を導入し、$[P]A$、$[F]A$ をそれぞれ「過去においていつも A」、「未来においていつも A」と解釈する。そして $\Box A$ を $[P]A \wedge A \wedge [F]A$(「過去、現在、未来を通していつも A」) の省略形と考える。

時間論理に対してもフレームによる解釈を自然に定義することが可能である。この場合、それぞれの可能世界は一つ一つの時点を表すことになる。また R を到達可能関係とすると aRb は時点 b は時点 a より後にあることを意味することになる。

本研究では、時間論理のもっとも基本的な体系 K_t および時間論理のフレームと付値を定義し、時間の構造の違いがどのように論理式に反映されるかを小野 [1] の問を解くことで検討した。

6 おわりに

本研究では、様相論理を導入することにより日常的な思考の中に現れる推論を形式化できた。また、様相論理が現代の情報・科学技術の進歩に少なからず影響を与えていることが分かった。これからの我々の将来においても、様相論理の更なる社会的貢献を期待したい。

参考文献

[1] 小野寛晰 : 情報科学における論理, 日本評論社 (1994).