実数と帰納法

2005MM031 小木曽公人

指導教員：佐々木克巳

1 はじめに

本研究では, 島内 [2] にしたがって, 連続帰納法の理解を深めることを目的としている. 本稿では連続帰納法を使った証明の例を 2 つあげ、連続帰納法を使ってみて気づいたことを述べる.

2 連続帰納法

廣瀬 [1], 島内 [2] により, 以下の主張を連続帰納法という.

[連続帰納法]

a をある実数,$Q(x)$ を実数 x についての述語とする. このとき,
“$a \leq x$ なるすべての実数 x について $Q(x)$ が成り立つ” ことを証明するには以下の (I),(II),(III) を示せばよい.

(I) $Q(a)$ が成り立つ,

(II) $Q(b)$ が成り立つ任意の b に対して,$b < c$ なる実数 c が存在して,$b < x < c$ なる任意の実数 x について $Q(x)$ が成り立つ,

(III) $b < c$ なる任意の実数b,cをとったとき,$b < x < c$ なる任意の x について $Q(x)$ が成り立つと仮定すれば $Q(c)$ が成り立つ.

この連続帰納法は以下のように数式化できる.

$a \in R$,$A \subset R$ とする. 以下の 3 つの条件が成り立つならば,

$$[a, \infty) \subset A$$

である.

(I) $a \in A$,

(II) $\forall b \in A; \exists c \in R : [b < c \wedge (b, c) \subset A]$,

(III) $\forall b, c \in R : [b < c \wedge (b, c) \subset A \rightarrow c \in A]$.

この連続帰納法はデデキントの切断により証明が可能である.

3 連続帰納法を使った証明の例 1

定理 3.1 [ハイネ・ボレルの定理] R における有界な閉集合はコンパクトである. すなわち, R における有界閉集合が開集合で覆われたとすれば, それら開集合の中の適当な有限個で覆われる.

(証明) A を R の有界閉集合とし,$\mathfrak{A}$ を A の開被覆とする.A は有界だから,a を A の下界の 1 つとして,

$$B=\{x \mid \exists \mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}; (\mathfrak{B} : \text{有限} \wedge [a, x] \cap A \subset \bigcup \mathfrak{B})\}$$

とおく. ここで, 連続帰納法により,$[a, x) \subset B$ を示す.

(1) $a \in A$ のときは, $[a, a] \cap A = \{a\}$.

$a \notin A$ のときは, $[a, a] \cap A = \emptyset$.

いずれにしても,$[a, a] \cap A$ は $\mathfrak{A}$ の 1 個または 0 個の元で覆われるから,

$$a \in B.$$

(2) $b \in B$ と仮定する.$\mathfrak{A}$ の有限部分集合 $\mathfrak{B}$ が存在して,

$$[a, b] \cap A \subset \bigcup \mathfrak{B}.$$

(i) $b \notin A$ のときは,$b \in R - A$.$R - A$ は開集合だから, 適当な $\varepsilon > 0$ が存在して,

$$(b - \varepsilon, b + \varepsilon) \subset R - A.$$

いま,$b < c < b + \varepsilon$ となるような c をとり,$b < x < c$ とすれば,

$$\begin{aligned} [a, x] \cap A &= ([a, b] \cup (b, x]) \cap A \\ &= ([a, b] \cap A) \cup ((b, x] \cap A) \\ &\subset ([a, b] \cap A) \cup ((b - \varepsilon, b + \varepsilon) \cap A) \\ &= [a, b] \cap A \\ &\subset \bigcup \mathfrak{B}. \end{aligned}$$

$[a, x] \cap A$ は $\mathfrak{A}$ の有限部分集合で覆われるから,

$$x \in B, \quad (b, c) \subset B.$$

(ii) $b \in A$ のときは,$\mathfrak{A}$ の元 C が存在して, $b \in C$. C は開集合だから, 適当な $\varepsilon > 0$ に対して,

$$(b - \varepsilon, b + \varepsilon) \subset C.$$

そこで,$b < c < b$+ε となるような C をとり,$b < x < c$ とすれば,( ) と同様に,

$$\begin{aligned} [a, x] \cap A &= ([a, b] \cup (b, x]) \cap A \\ &= ([a, b] \cap A) \cup ((b, x]) \cap A) \\ &\subset ([a, b] \cap A) \cup ((b - \varepsilon, b + \varepsilon) \cap A) \\ &\subset ([a, b] \cap A) \cup (b - \varepsilon, b + \varepsilon) \\ &\subset \bigcup \mathfrak{B} \cup C \\ &= \bigcup (\mathfrak{B} \cup \{C\}). \end{aligned}$$

$[a, x] \cap A$ は $\mathfrak{A}$ の有限部分集合で覆われるから,

$$x \in B, \quad (b, c) \subset B.$$

(3) $b < c, (b, c) \subset B$ と仮定する.

(i) $c \notin A$ のときは,$R - A$ は開集合だから, 適当な $\varepsilon > 0$ が存在して,

$$(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset R - A.$$

いま,$\max(b, c - \varepsilon) < d < c$ となるような d をとれば,

$$d \in (b, c) \subset B, \quad d \in B.$$

ゆえに,$\mathfrak{A}$ の有限部分集合 $\mathfrak{B}$ が存在して,

$$[a, d] \cap A \subset \bigcup \mathfrak{B}$$

となる. したがって (2) の ( ) と同様に,

$$\begin{aligned} [a, c] \cap A &= ([a, d] \cup (d, c]) \cap A \\ &\cdots \\ &\subset \bigcup \mathfrak{B}. \end{aligned}$$

(ii) $c \in A$ のときは,$\mathfrak{A}$ の元 C が存在して,$c \in C$. C は開集合だから, 適当な $\varepsilon > 0$ に対して,

$$(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subset C.$$

(i) のときと同様に, $\max(b, c-\varepsilon) < d < c$ となる d をとれば,$[a,d] \cap A$ は $\mathfrak{A}$ のある有限部分集合 $\mathfrak{B}$ によって被覆される. そこで,(2) の (ii) と同様に,

$$\begin{aligned}[a,c] \cap A &= ([a,d] \cup (d,c]) \cap A \\ &\cdots \\ &\subset \bigcup \mathfrak{B} \cup C \\ &= \bigcup (\mathfrak{B} \cup \{C\}).\end{aligned}$$

いずれにしても,$[a,c] \cap A$ は $\mathfrak{A}$ の有限部分集合によって被覆されるから,

$$c \in B.$$

(1),(2),(3) により, 連続帰納法の前提が成り立つことが分かった. したがって,

$$[a, \infty) \subset B.$$

すなわち,$x \geq a$ となる任意の実数 x について,

$$[a,x] \cap A.$$

は $\mathfrak{A}$ の有限部分集合で被覆される. ところで,A は有界だから,x を A の上界にとれば,

$$[a,x] \cap A = A$$

であり,A が $\mathfrak{A}$ の有限部分集合で被覆されることになる.

4 連続帰納法を使った証明の例 2

定理 4.1 $A \subset R, \forall a \exists \varepsilon (\forall y(a < y \leq a+\varepsilon \to y \notin A) \vee \forall y(a < y \leq a+\varepsilon \to y \in A))$ を満たす A が有界であるならば、上限が存在する

(証明) $l \in A$ とし, 連続帰納法により,$l \leq x$ なるすべての実数 x について

$$(-\infty, x] \cap A \text{ に上限が存在する} \quad \cdots (※)$$

を証明する.

(1)$x = l$ のとき, $(-\infty, x] \cap A = (-\infty, l] \cap A$. よって,$l \in A$ より,l が上限となるので (※) が成立する.

(2) $x = b(l < b)$ のとき,(※) が成立すると仮定する. すなわち,$(-\infty, b] \cap A$ に上限が存在する と仮定する.

(i) $\forall y(b < y \leq b+\varepsilon \to y \notin A)$ のとき,$b+\varepsilon = c$ とし,$b < k < c$ とすると,$k \notin A$. よって,

$$\begin{aligned}(-\infty, k] \cap A &= ((-\infty, b] \cup (b,k]) \cap A \\ &= ((-\infty, b] \cap A) \cup ((b,k] \cap A) \\ &= ((-\infty, b] \cap A).\end{aligned}$$

となる. よって, 仮定より k について (※) が成立する.

(ii) $\forall y(b < y \leq b+\varepsilon \to y \in A)$ のとき,$b+\varepsilon = c$ とし,$b < k < c$ とすると,$k \in A$. よって,$(-\infty, k] \cap A$ は k を上限に持つので,k について (※) が成立する.

(3) 任意の実数 $b, c(b < c)$ をとり,$b < k < c$ なる k について (※) が成立すると仮定する.

(i) $c \notin A$ のとき,

$$\begin{aligned}(-\infty, c] \cap A &= ((-\infty, k] \cup (k,c]) \cap A \\ &= ((-\infty, k] \cap A) \cup ((k,c] \cap A) \\ &= ((-\infty, k] \cap A).\end{aligned}$$

となる. よって, 仮定より c について (※) が成立する.

(ii) $c \in A$ のとき,$(-\infty, c] \cap A$ は c を上限に持つので,c について (※) が成立する.

(1),(2),(3) より, 連続帰納法の前提が成り立つことが分かった. したがって, すべての実数 x において「$l \leq x \to (-\infty, x] \cap A$ に上限が存在する」ことが成立する.

ところで,A は有界だから,x を A の上界にとれば,

$$(-\infty, x] \cap A = A$$

であり,A に上限が存在する.

5 連続帰納法を使ってみて

第 3 節の証明と田中, 鈴木 [3] による, ハイネ・ボレルの定理の一般的な証明とを比較し, 連続帰納法について以下に述べる.

まず, 連続帰納法の特徴は, 諸定理を知っていなくても証明できるという点であると感じた. ハイネ・ボレルの定理の一般的な証明では, カントールの区間縮小法の原理や極限などを使っているのに対し, 連続帰納法を使った証明では, 一般的な集合の知識だけで証明できているからである. しかし, このことはハイネ・ボレルの定理の証明についてに言えることであって, 実際に上手く証明できない例もあった.

また, 実数下における定理の証明ならば連続帰納法が使用できる点も連続帰納法の特徴として挙げられる. 実数における証明のアプローチが明確でなければ,1 つのアプローチとして連続帰納法を使用することも考えられる.

また, 連続帰納法は帰納法の前提の (II) の c の取り方で, 証明の難易度が変わるということも分かった. しかし, 適当な c の取り方を見つけるのも難しいことも連続帰納法を使用してみて分かった.

6 おわりに

本研究では, 連続帰納法についての興味から始まり, デデキントの公理, 連続帰納法の証明, 連続帰納法での証明の例の順で研究してきた. これにより, 連続帰納法の理解を深めることができた. しかし, 現在この証明法が広く知られてないことを考えると, ある欠点が存在するはずである. その欠点についての研究も行うことができたらよかった.

参考文献

[1] 廣瀬健 :『シリーズ新しい応用数学 11 数学的帰納法』. 教育出版,(1975).

[2] 島内剛一 :『数学の基礎』. 日本評論社,(1971).

[3] 田中一之, 鈴木登志雄 :『数学のロジックと集合論』. 培風館,(2003).