エルブランの定理と導出原理

2005MM016 稲葉将一
指導教員：佐々木克巳

1 はじめに

本研究では, 小野 [1] にそって, その第 3 章で紹介されている「エルブランの定理と導出原理」について考えていく.「エルブランの定理」は, 述語論理における一つの性質である．本稿では, まず述語論理を導入する．そして,「エルブランの定理」を示し，その後「導出原理」について述べる．ここでは,「エルブランの定理と導出原理」を理解し示すこと，および，それを適用した例を挙げることを目的とする．

2 述語論理

ここでの述語論理の言語は以下のものからなる．

1) 論理結合子 $\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\neg$
2) 量化記号 $\forall$, $\exists$
3) 対象変数 x, y, z, $\cdots\cdots$
4) 対象定数 c, d, $\cdots\cdots$
5) 関数記号 f, g, $\cdots\cdots$
6) 述語記号 P, Q, $\cdots\cdots$
7) 補助記号 (,) , , (コンマ)

ただし，4)，5)，6) は言語の選び方によって異なる．

この言語を用いて, 述語論理の項と論理式を小野 [1] にしたがって定義する．

定義 2.1 **項の代入** A の自由変数 x_i に項 t_i を代入した結果を，$A[t_1/x_1,\cdots,t_n/x_n]$ と書く．

また，言語 $\mathcal{L}$ に対する構造 $\mathfrak{A}$ や恒真の定義は小野 [1] に書いてあるものを適用する．

3 エルブランの定理

この節ではエルブランの定理，および，それを用いた例を示す．

定義 3.1 $H_{\mathcal{L}}$ は変数を含まないような言語 $\mathcal{L}$ の項全体の集合とする. ただし,$\mathcal{L}$ が一つも定数記号を含まないときには, まず定数記号を一つ $\mathcal{L}$ につけ加えておき, その上で変数を含まない項全体の集合を $H_{\mathcal{L}}$ と定義することにしておく．

定義 3.2(**エルブラン構造**) つぎの条件をみたす構造 $\mathfrak{A} =< U, J >$ を言語 $\mathcal{L}$ に対するエルブラン構造という．

1) $U = H_{\mathcal{L}}$.
2) c が $\mathcal{L}$ の対象定数のとき, $c^J = c$.
3) f が $\mathcal{L}$ の n 変数関数記号のとき, $f^J(t_1,\cdots,t_n) = f(t_1,\cdots,t_n)$(ただし $t_1,\cdots,t_n \in H_{\mathcal{L}}$).

定理 3.3(**エルブランの定理**)

$\exists x_1\cdots\exists x_n B$ を言語 $\mathcal{L}$ の閉じた冠頭論理式とする. ここで B は量化記号を一つも含まない論理式とする．このとき，$\exists x_1\cdots\exists x_n B$ が恒真になるための必要十分条件は, ある自然数 $m(\geq 1)$ と $H_{\mathcal{L}}$ の項 $t_{i1},\cdots,t_{in}(i=1,\cdots,m)$ が存在して

(1) $B[t_{11}/x_1,\cdots,t_{1n}/x_n]\vee\cdots\cdots\vee B[t_{m1}/x_1,\cdots,t_{mn}/x_n]$

が任意の $\mathcal{L}$ に対するエルブラン構造で真になることである．

本研究では，小野 [1] にある定理 3.3 の証明を補いながら理解し，それを卒業論文にまとめた．本稿では，その部分は省略する．

つぎに，エルブランの定理を適用した例を述べる．すなわち，エルブランの定理を用いて, 論理式

$$\exists x\exists y((P(x)\supset Q(f(x,y)))\vee(Q(y)\supset P(g(x,y))))$$

が恒真であることを示す．

まず，この論理式には一つも対象定数を含まないので, 新たな対象定数 c をつけ加えて，エルブラン領域 $H_{\mathcal{L}}$ を作ると

$$H_{\mathcal{L}} = \{c, f(c,c), g(c,c),\cdots\}$$

となる．そして $H_{\mathcal{L}}$ の項を，与式から量化記号を除いてできる論理式に，簡単な方から代入していき，トートロジーかどうかを確かめていく．

ここでは，代入 $[c/x, c/y]$ による論理式と，代入 $[c/x, f(c,c)/y]$ による論理式との論理和が，トートロジーとなる．具体的にその論理和は

$$((P(c)\supset Q(f(c,c)))\vee(Q(c)\supset P(g(c,c)))\vee(P(c)\supset Q(f(c,f(c,c))))\vee(Q(f(c,c))\supset P(g(c,f(c,c)))))$$

となる．これがトートロジーであることは，対応する命題論理の論理式

$$((p\supset q)\vee(r\supset s))\vee((p\supset t)\vee(q\supset v))$$

がトートロジーになることからわかる．

4 導出原理－命題論理の場合

この節では，命題論理の導出原理について述べる．具体的には，導出計算 R_0 を導入し，その完全性を示す．さらに，R_0 を適用した例を挙げる．

まず，導出計算 R_0 を導入する．

一般に原子論理式または原子論理式の前に否定記号を一つつけた論理式のことを**リテラル**という．リテラル A に対して

$$A^* = \begin{cases} \neg p & A\text{ が }p\text{ のとき} \\ p & A\text{ が}\neg p\text{ のとき} \end{cases}$$

とおく．リテラルの有限集合を**節**という．空集合の場合には**空節**とよび，それを□で表わす．節の有限集合を**節集合**という．

二つの節 C_1 と C_2 に対し，$A\in C_1$，$A^*\in C_2$ とする．このとき，節 $(C_1-\{A\})\cup(C_2-\{A^*\})$ を C_1 と C_2 からの**導出節**という．二つの節から導出節を作りだす操作のことを**導出原理**という．与えられた節集合 S から節 C に

到る R_0 の**導出図**をつぎのように定義しておく．

1) 節 C が節集合 S に属すときには，C だけからなる図は S から C に到る R_0 の導出図である．

2) S から節 C_1 に到る R_0 の導出図 $\mathfrak{D}_1$ と S から節 C_2 に到る R_0 の導出図 $\mathfrak{D}_2$ がすでに定義されているとする．さらに C_1 と C_2 から導出原理により節 C が得られるものとする．このとき，図 1 に与えられる図は S から C に到る R_0 の導出図である．

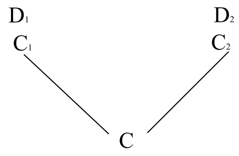

図 1　R_0 の導出図

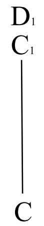

図 2　R_1 の導出図

節集合 S から節 C に到る R_0 の導出図が存在するとき，R_0 で S から C は**導出可能である**であるという．

空でない節集合 $S = \{C_1, \cdots, C_m\}$ に対し S の論理和標準形表現 $d(S)$ を

$$d(S) = (\wedge C_1) \vee \cdots \vee (\wedge C_m)$$

と定める．

定理 4.1(R_0 **の完全性**)　S を任意の空でない節集合とする．このとき，$d(S)$ がトートロジーであるための必要十分条件は R_0 で S から□が導出可能になることである．

本研究では，小野 [1] にある定理 4.1 の証明を補いながら理解し，それを卒業論文にまとめた．本稿では，その部分は省略する．

つぎに，R_0 を適用した例を述べる．すなわち，定理 4.1 を用いて論理式

$$(p \wedge \neg s) \vee \neg p \vee (r \wedge q) \vee (p \wedge \neg q \wedge s) \vee (\neg r \wedge q)$$

がトートロジーになることを示す (この例は，小野 [1] で問として取り上げられている)．

この問題の論理式を A とする．そして，この論理式 A から節集合を定める．その節集合から□に到る導出図を作ることができれば，トートロジーになる．

このとき作られる節集合 S はつぎの節からなる．

$\{p, \neg s\}$，$\{\neg p\}$，$\{r, q\}$，$\{p, \neg q, s\}$，$\{\neg r, q\}$

となる．この節集合 S に対して，S から□に到る導出図を作ることができるので，この問題の論理式がトートロジーであることがわかる．

5　導出原理ー述語論理の場合

この節では，述語論理の導出原理について述べる．具体的には，導出計算 R_1 を導入し，その完全性を示し，さらに，R_1 を適用した例を挙げる．

まず，導出計算 R_1 を導入する．R_1 の導出図は R_0 の導出図の定義 1)，2) につぎの 3) をつけ加えることにより定義される．

3) S から節 C_1 に到る R_1 の導出図 $\mathfrak{D}_1$ が定義され，また代入 θ に対し $C_1\theta = C$ であるとする．このとき，図 2 に与えられる図は S から C に到る R_1 の導出図である．

定理 5.1(R_1 **の完全性**)　S を空でない任意の節集合とする．また，$x_1, \cdots, x_n$ を S に現われる変数全体の集合とする．このとき，論理式 $\exists x_1 \cdots \exists x_n d(S)$ が恒真になるための必要十分条件は S から空節が R_1 で導出可能となることである．

本研究では，小野 [1] にある定理 5.1 の証明を補いながら理解し，それを卒業論文にまとめた．本稿では，その部分は省略する．

つぎに，導出計算 R_1 を用いて，論理式
$(\forall x \forall y(R(x,y) \supset R(y,x)) \wedge \forall x \forall y \forall z((R(x,y) \wedge R(y,z)) \supset R(x,z)) \wedge \forall x \exists y R(x,y)) \supset \forall z R(z,z)$
が恒真になることを示す．

まず，対象定数や関数記号を導入し，この論理式と同等で $\exists x_1 \cdots \exists_n B$ の形の論理式を作る．ただし，B は論理和標準形の論理式である．この B から，節集合 S がつぎのように定まる．

$\{R(x,y), \neg R(y,x)\}$，$\{R(u,v), R(v,w), \neg R(u,w)\}$，$\{\neg R(x', f(x'))\}$，$\{R(c,c)\}$

S から□に到る導出図が図 3 のように導けるので，もとの論理式が恒真であることがわかる．

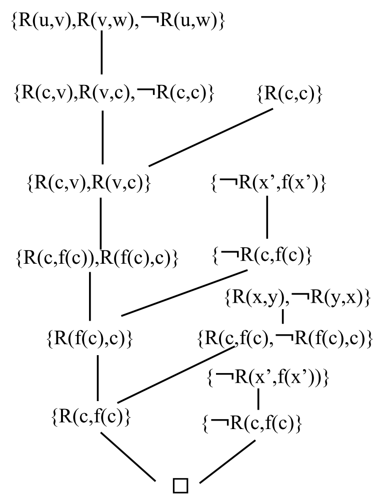

図 3

6　終わりに

以上で,「エルブランの定理と導出原理」を理解できた．そして，定理 5.1 の証明には,「エルブランの定理」が必要であることがわかった．しかし，導出計算 R_2 ができなかったのが心残りである．

参考文献

[1] 小野 寛晰著 :『情報科学における論理』．日本評論社, (1994).