新しいn手ジャンケンのルールと確率論的解析
—特に4手以上について—

2005MM013 久田純大 2005MM095 柳原 知典
指導教員 尾崎 俊治

1 はじめに

ジャンケンは古くから伝わる拳遊びである．国，地域によって様々なジャンケンが存在する．私たちは，代表者を決めるとき，また，順番を決めるときの手段として通常グー・チョキ・パーの3手のジャンケンを用いる．多人数のジャンケンで１人の勝者を選ぶには，最後の１人が決まるまで何回もジャンケンをしなければいけない．

そこで，本研究では，参加する人数，手の出し方，ルールを変更することにより，勝者が１人に決まるまでの試行回数が変わってくることに注目した．そこで，次のようなジャンケンを目標とし研究していく．

- 試行回数が通常のジャンケンに比べ少ない．
- ルールがわかりやすい．
- 勝ち方について対称性が保たれている．
- 試行回数のばらつきが小さい．

また，本研究は文献 [1] を参考した．

2 ジャンケンとは

ジャンケンは「拳 (けん) の一種であり，掌を握ったのを石，掌を開いたのを紙，人さし指と中指の二本を出したのを鋏 (はさみ) とし，鋏は紙に，紙は石に，石は鋏に勝つものとして勝負を争う遊戯」[2] である．

現在行われているジャンケンは意外に新しく，近代になって（19 世紀後半）誕生したものである．今でも西日本に多く残る拳遊びから（日本に古くからあった三すくみ拳に 17 世紀末に中国から伝来した数拳が加わって）考案されたと考えられる．極めて完成度の高い拳遊びだったために，日本の海外発展や柔道など日本武道の世界的普及，漫画やアニメに伴い急速に世界中に広がった．

2.1 ナッシュ均衡

ナッシュ均衡とは，1950 年にジョン・ナッシュにより考案された，現在のゲーム理論において最も基本的な均衡概念である．

ナッシュ均衡は全ての参加者が他人の戦略を見て，自分の利得を最大にする戦略を選んでいる状態である．全ての参加者がこのような状態にあれば，誰も自分の戦略を変更しようとしないため，安定的になる [3]．

2.2 混合戦略

プレーを実行するごとに，各プレーヤーが手番を確率１で選択するならば，プレーヤーは純粋戦略を採用していると呼ぶ．手番をとるにあたってプレーヤーはサイコロを振るなどして確率化しないという意味である．

一方ジャンケンなどのゲームのもとで，期待利得の意味で各プレーヤーが手番を確率的に選択するならば，プレーヤーは混合戦略を採用していると呼ぶ．すなわち戦略を確率的に混合し，ランダムに戦略を選択するということである [4]．

3 3手のジャンケン

ここでは日本で一般的な「3 手のジャンケン」を用いて解析を行う．コンピュータのプログラミングを使い，プレーヤーの人数に応じて，勝者が一人に決まるまでの平均試行回数や，その標準偏差がどう変化するかを研究していく．ここで，各プレーヤーの手はそれぞれ 1/3 の確率の混合戦略をとり，ナッシュ均衡状態で行うものとする．

3.1 3手ジャンケンの解析

n 人がジャンケンをする時，1 人だけが勝ち残るまでの平均回数を a_n とすると a_n は,

$$a_n = \frac{3^{n-1}}{2^n-2} + \frac{1}{2^n-2}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}a_k \qquad (1)$$

$$(\text{ただし}, a_0 = a_1 = 0)$$

となる [5]．

3.1.1 シミュレーション

次の表 1 は a_n の式から求めた平均回数と，シミュレーションによって求めた平均回数の比較である．ここで、各シミュレーションのは試行回数は 100,000 回とし,「手」はそれぞれ等しい確率で出るものとする．また，srand 関数を使うことで再現性のある乱数を用いて行った．

表 1 3 手のジャンケンの平均回数

人数 (n)	a_n	シミュレーション	標準偏差
2	1.50	1.50	0.9
4	3.21	3.21	1.8
6	6.22	6.23	3.9
8	12.11	12.15	8.6
10	24.35	24.34	19.3

a_n の式とコンピュータによってもとめた平均回数はほぼ一致した．

4 4手以上のジャンケン

ここでは 4 手以上のジャンケンを扱う．フランスには石，井戸，鋏，木の葉の 4 手のジャンケンが存在する．また，モンゴルには指を１本ずつ出す 5 手のジャンケンが存在する [6] [7]．

4.1　4 手のジャンケン

フランスの 4 手ジャンケンには重大な欠点がある．それは，石 (Rock) が絶対に不利になることである．これは石も井戸 (Well) も鋏 (Scissors) に勝ち，木の葉 (Leaf) に負けるが，石は井戸に負けるからである (図 1).

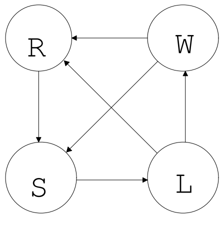

図 1　フランスの 4 手のジャンケン

ここで扱う 4 手のジャンケンは，どの手も 1 勝 1 敗 1 分にするために以下のようなルールを採用する．

1. 手は A，B，C，D の 4 手.
2. A は B に，B は C に，C は D に，D は A に勝つ.
3. 4 種類もしくは 3 種類の手が出た場合は「あいこ」.

そこで，どの手も 1 勝 1 負 1 分になるものとすると，n 人がジャンケンをするとき，勝者が一人に決まるまでの平均回数を e_n とすると e_n は

$$e_n = \frac{4^{n-1}}{2^n - 2} + \frac{1}{2^n - 2}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}e_k \qquad (2)$$

$$(\text{ただし}, e_0 = e_1 = 0)$$

となる．

これより $a_n < e_n$ であり、3 手のジャンケンのほうが早く勝者が 1 人に決まることがわかる．表 2 は e_n の式から求めた平均回数と，シミュレーションによって求めた平均回数の比較である．

表 2　4 手のジャンケンの平均回数

人数 (n)	e_n	シミュレーション	標準偏差
2	2.00	2.00	1.41
4	6.48	6.47	4.58
6	20.86	20.87	16.75
8	73.37	73.02	65.16
10	274.63	277.33	257.89

「4 手のジャンケン」は勝者が 1 人に決まるまでの回数が大きくなる．これは「あいこ」になる手の組合せが多いことが原因と考えられる．

4.2　5 手のジャンケン

ここでは図 2 のようなジャンケンについて研究する．そこで以下のようなルールを採用する．

1. 3 種類以上の手が出た場合，図 2 において有向グラフがループしているなら「あいこ」.
2. ループしていない手が出た場合，有向グラフの始点となっていて，終点となっていない手の勝ち.

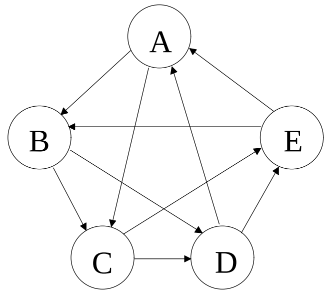

図 2　5 手のジャンケン

この「5 手のジャンケン」は各手が 2 勝 2 敗となるため，あいこの回数が減り平均試行回数が減ることが考えられる．n 人がジャンケンをするとき，勝者が一人に決まるまでの平均回数を i_n とすると i_n は

$$i_n = \frac{5^{n-1}}{3^n - 2^n - 1} + \frac{2^n}{3^n - 2^n - 1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^k}\binom{n}{k}i_k \qquad (3)$$

$$(\text{ただし}, i_0 = i_1 = 0)$$

である．表 3 はこのときの i_n と平均試行回数のシミュレーションの比較である．

表 3　5 手のジャンケンの平均回数 (1)

人数 (n)	i_n	シミュレーション	標準偏差
2	1.25	1.25	0.56
4	2.65	2.65	1.62
6	5.90	5.91	4.36
8	14.14	14.12	12.02
10	36.09	36.03	33.27

図 3 は 3 手と 5 手の平均回数についての比較のグラフである．

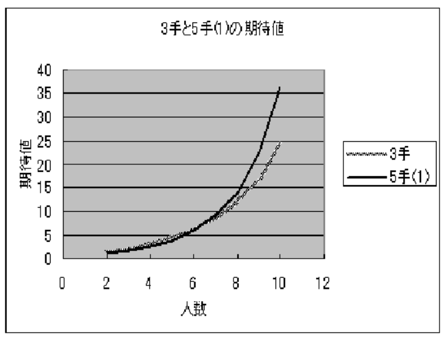

図 3　3 手と 5 手の比較

表 3 と図 3 より，人数が 6 人以下であれば 5 手のジャンケンの方が早く勝者が 1 人に決まる．

5　新しい 5 手のジャンケン

ここでは上記のジャンケンの中で,「5 手のジャンケン」についてさらに研究する．

5.1 5 手のジャンケン (その 2)

新しい 5 手のジャンケンとして，3 手のジャンケンの 1 つの手を 3 つに分けるという方法が考えられる．図 4 が勝敗のつきかたである．ここでは以下のルールを採用する．

1. A は C が出ておらず，1 つでも B（B1，B2，B3）が出ている場合に勝ち．
2. B（B1，B2，B3）はそれぞれ，A が出ておらず C が出ている場合に勝ち．また 2 種類の B が出ている場合は図 4 の勝敗に従い，1 種類の B のみが勝ち残る．
3. 3 種類の B と C が出たときは，全ての B が勝ち残る．
4. C はいずれの B も出ておらず、A が出ている場合に勝ち．
5. A，C といずれか 1 つでも B が出ていれば「あいこ」．
6. B のみが出た場合は，B のみの 3 手ジャンケンと考え勝敗が決まる．

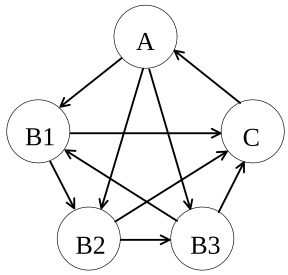

図 4 新しい 5 手のジャンケン

n 人がジャンケンをするとき，勝者が一人に決まるまでの平均回数を p_n とすると p_n は，1 回のジャンケンで n 人中 k 人が勝ち残る確率 $P_{n,k}$

$$P_{n,k} = \begin{cases} \frac{1}{5^n}\binom{n}{k}(3^{n-k} + 3 \cdot 2^{n-k} + 1) \\ (n \leq 3 \text{ または } k \leq 2 \text{ のとき}) \\ \\ \frac{1}{5^n}\binom{n}{k}\{3^{n-k} + 3(2^{n-k} + 3^{k-1} - 2^k + 1\} \\ (n \geq 4 \text{ かつ } k \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{4}$$

を用いて求めることができる．

次の表 4 は p_n とシミュレーションの結果である．

表 4 5 手のジャンケンの平均回数 (2)

人数 (n)	p_n	シミュレーション	標準偏差
2	1.25	1.25	0.56
4	2.22	2.23	1.25
6	3.54	3.54	2.13
8	5.32	5.32	3.39
10	7.83	7.84	5.29

シミュレーションの結果，勝者が 1 人に決まるまでの平均回数に関しては，このルールは従来の「3 手のジャンケン」よりも優れていることがわかった．

しかし，B を選ぶ選択肢が 3 つ（B1，B2，B3）あるため，B に負ける C が弱くなるという問題点があるように感じられる．そこで実際に A，B，C が勝つ回数をシミュレーションしたところ，表 5 のような結果が出た．

表 5 各手の勝利回数

人数 (n)	A	B	C
2	30,015	60,120	9,865
4	60,309	84,834	8,234
6	72,045	94,114	7,510
8	98,420	120,136	7,345
10	111,289	134,177	7,537

シミュレーションの結果，C が勝つ回数が他の手に比べて明らかに少なく勝敗について対称性が保たれていないことがわかった．

5.2 3 手のジャンケン (その 2)

5.1 節では，全ての手が $\frac{1}{5}$ の確率で出ているようにした．しかし，ここでは次のような確率で手が出るものとして解析を行った．

$$A = C = \frac{1}{3}$$
$$B1 = B2 = B3 = \frac{1}{9}$$

これは図 5 のように B を一つの手として考えるため，3 手のジャンケンを変化させたものと考えられる．また，他の細かいルールは 5.1 節と同様である．

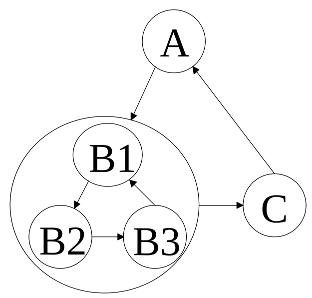

図 5 新しい 3 手のジャンケン

これにより，各 B の手が出る確率が減り C が弱いという点を改善できることが期待される．このルールでの平均回数を t_n とすると t_n は，1 回のジャンケンで n 人中 k 人が勝ち残る確率 $T_{n,k}$

$$T_{n,k} = \begin{cases} \frac{1}{3^n}\binom{n}{k}\left(2 + \frac{4^{n-k}}{3^n}\right) \\ (n \leq 3 \text{ または } k \leq 2 \text{ のとき}) \\ \\ \frac{1}{3^n}\binom{n}{k}\left(2 + \frac{4^{n-k}}{3^n} + \frac{3^{k-1} - 2^k + 1}{3^{k-1}}\right) \\ (n \geq 4 \text{ かつ } k \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{5}$$

表 6 3 手のジャンケンの平均回数 (2)

人数 (n)	t_n	シミュレーション	標準偏差
2	1.35	1.35	0.69
4	2.84	2.84	1.69
6	5.69	5.71	2.52
8	11.46	11.51	5.69
10	23.61	23.57	19.31

を用いて求めることができる．表 6 はこの場合の t_n とシミュレーションである．

このルールは通常の 3 手のジャンケンよりは平均回数が少ない．また各手の勝利回数は表 7 のようになった．

表 7 各手の勝利回数 3(2)

人数 (n)	A	B	C
2	29,837	39,838	30,325
4	53,870	60,870	53,713
6	68,164	75,377	68,315
8	80,238	86,798	79,665
10	89,890	95,961	89,293

これは表 5 に比べ，対称性について改善されている．しかし，どの n についても B の勝利回数が多いことも言える．

5.3 5 手のジャンケン (その 3)

これまでの方法では各手について対称性が保たれないので，ここでは「5 手のジャンケン」(4.2) に新たなルールを加える．

1. 図 2 において有向グラフがループしている場合，グラフの始点が多い手の勝ち．
2. 始点の数が最多である手が複数ある場合は，その複数の手全てが勝ち．

n 人がジャンケンをするとき，勝者が一人に決まるまでの平均回数を x_n とすると x_n は，1 回のジャンケンで n 人中 k 人が勝ち残る確率 $X_{n,k}$

$$X_{n,k} = \begin{cases} \frac{1}{5^{n-1}}\binom{n}{k}2^{n-k} \\ (n \leq 3 \text{ または } k = 1 \\ \qquad \text{または } (n-k) = 1 \text{ のとき}) \\ \\ \frac{1}{5^{n-1}}\binom{n}{k}\{2(2^{k-1}-1)(2^{n-k}-2)+2^{n-k}\} \\ (n \geq 4 \text{ かつ } k \geq 2 \text{ かつ } (n-k) \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{6}$$

を用いて求めることができる．表 8 はこの場合の x_n とシミュレーションである．

このルールであれば各手の対称性は保たれているといえる．さらに 10 人で行ったとしても平均 4.79 回で勝者が 1 人に決まるため，通常の 3 手のジャンケンよりも優れている．ここで，図 6 は「3 手その 1」と「4 手」,「5 手 (その 3)」のそれぞれのジャンケンを行った場合の平均回数の比較のグラフである．

表 8 5 手のジャンケンの平均回数 (3)

人数 (n)	x_n	シミュレーション	標準偏差
2	1.25	1.25	0.56
4	2.27	2.27	1.14
6	2.99	2.98	1.31
8	3.78	3.79	1.60
10	4.79	4.79	2.13

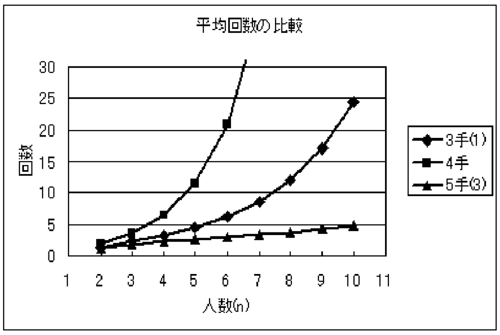

図 6 各ジャンケンによる比較

6 おわりに

本研究において，3 手，4 手，5 手のジャンケンの解析を行った．それにより平均試行回数や強さの偏りを求めることができ，それぞれの持つ特徴を見つけることが出来た．この結果から偶数個の手のジャンケンよりも奇数個の手のジャンケンの方が平均試行回数が少なくてすむことがわかった．また小さなルールの変更，追加が大きくそのジャンケンの性質を変えることにつながった．

今回の研究では 5 手のジャンケン (その 3) が，通常のジャンケンより平均回数や標準偏差の点で優れているものとして挙げられる．

参考文献

[1] 服部太輔，細江政範，石黒友一: ジャンケンの文化的側面と数理解析，南山大学数理情報学部数理科学科卒業論文 (2006).

[2] 広辞苑 (第五版)，岩波書店.

[3] 独学ノート http://note.masm.p/%A5%CA%A5%C3%A5%B7%A5%E5%B6%D1%B9%D5/

[4] 小和田正，澤木勝茂，加藤豊: 『OR 入門　意思決定の基礎』，実教出版株式会社，1984.

[5] 伊藤暁，井上克司，王躍，岡崎世雄: ジャンケンの計算量，電子情報通信学会論文誌 (D)，Vol.J86，No.7，pp.452-457，2003.

[6] 多文化理解事典 http://www.netlaputa.ne.jp/~tokyo3/janken.html

[7] 李御寧: 『ジャンケン文明論』，新潮社，2005.