表現論の基礎
—有限群の既約表現—

2005MM011 平野智博
指導教員：宮元忠敏

1　はじめに

表現論は数学や物理学のさまざまな分野と関わりをもつ分野である．群の表現は，群の作用する対象やその群自身の構造を調べるものである．本研究では，[1] と [2] を用いて，有限群の表現論の基礎理論について理解を深めることを目的としている．また，必要な群の理論は [3] を参考にした．

特に断らなければ，G を群，$g, g_1, g_2, \cdots$ を G の任意の元とする．また，$V, V_1, V_2, \cdots$ をベクトル空間とする．

2　線形表現の既約性 · 可約性 · 同値性

定義 2.1　$GL(V)$ を V から V への可逆な線形写像の全体とする．準同型 $\varpi : G \to GL(V)$ を G の V への**線形表現**といい，ϖ の**次元**を $\dim\varpi := \dim V$ とする．

以下，$\varpi, \varpi_1, \varpi_2, \cdots$ をそれぞれ $V, V_1, V_2, \cdots$ への G の線形表現とする．

定義 2.2　V の部分空間 V_1 が G**-不変**であるとは，$\varpi(g)V_1 \subset V_1$ となることである．V の G-不変部分空間が V と $\{\mathbf{0}\}$ に限られるとき，ϖ は**既約**であるといい，既約でないとき**可約**であるという．

定義 2.3　ϖ_1, ϖ_2 が互いに**同値**であるとは，つぎを満たす線形写像 $S : V_1 \to V_2$ が存在することである：

$$S \circ \varpi_1(g) = \varpi_2(g) \circ S.$$

このとき，$\varpi_1 \simeq \varpi_2$ とかく．また，S を V_1 から V_2 への**相関作用素**という．

表現の既約性や２つの表現の同値性を調べるために便利なシュアーの補題がある．相関作用素 $S : V_1 \to V_2$ に対して，$\mathrm{Ker}S, \mathrm{Im}S$ はそれぞれ，V_1, V_2 の自明でない G-不変部分空間となる．また，V の固有値 λ の属する固有ベクトル全体は V の G-不変部分空間となる．

補題 2.1　(**シュアー**)
- (i) G の２つの表現が既約であれば，その間の相関作用素は，零であるか，または可逆である．
- (ii) 既約表現 ϖ から自分自身への相関作用素は，スカラー作用素 λI_V　$(\exists\lambda \in \mathbb{C})$ である．

定理 2.2　可換群の既約表現はみな１次元である．

3　ユニタリ表現の完全可約性

定理 3.1　有限群の既約表現はみな有限次元である．

定義 3.1　V_1, V_2 の直和を $V_1 \dotplus V_2$ とする．次のように定義される $V_1 \dotplus V_2$ への表現 $\varpi_1 \oplus \varpi_2$ を表現の**直和**という：

$$\varpi_1 \oplus \varpi_2(g)(v_1 + v_2) := \varpi_1(g)v_1 + \varpi_2(g)v_2 \qquad (v_1 \in V_1, v_2 \in V_2).$$

$V = V_1 \dotplus V_2$ のとき，$\varpi \simeq \varpi_1 \oplus \varpi_2$ となるので，ϖ は ϖ_1 と ϖ_2 の**直和に分解**したという．ϖ が既約表現だけの直和に分解できるとき，ϖ は**完全可約**であるという．

定義 3.2　V にユニタリ内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ が定義されているとする．ϖ が**ユニタリ表現**であるとは，各 $\varpi(g)$ に対して次が成り立つときである：

$$\langle\varpi(g)u, \varpi(g)v\rangle = \langle u, v\rangle \qquad (u, v \in V).$$

ϖ が有限次元ならば，適当なユニタリ内積によってユニタリ表現にできる．V に自明でない G-不変部分空間 V_1 が存在するとき，その直交補空間 $V_1^{\perp}$ は G-不変になり，$V = V_1 \dotplus V_1^{\perp}$ となる．

定理 3.2　有限群の有限次元表現は完全可約である．

既約表現 ϖ_i が m_i 回現れるとき，ϖ の**既約分解**を

$$\varpi \simeq m_1\varpi_1 \oplus m_2\varpi_2 \oplus \cdots = \sum_i^{\oplus} m_i\varpi_i \tag{1}$$

と書く．ϖ_i を ϖ の**既約成分**といい，m_i を ϖ_i の**重複度**という．このとき，$\varpi(g)$ は次のブロック型の対角行列で表される：

$$\varpi(g) = \mathrm{diag}(\underbrace{\varpi_1(g), \cdots, \varpi_1(g)}_{m_1\text{個}}, \underbrace{\varpi_2(g), \cdots, \varpi_2(g)}_{m_2\text{個}}, \cdots).$$

以下，群は全て有限群とする．

4　表現の指標

定義 4.1　$\rho(g)$ を $\varpi(g)$ の行列表示とする．G 上の $\mathbb{C}$-値関数 $\chi(g) := \mathrm{tr}(\rho(g))$ を表現 ϖ の**指標**という．既約表現の指標を**既約指標**という．

以下，$\chi, \chi_1, \chi_2, \cdots$ をそれぞれ $\varpi, \varpi_1, \varpi_2, \cdots$ の指標とする．

定義 4.2　g_1, g_2 が互いに**共役**であるとは，ある $h \in G$ が存在して，$hg_1h^{-1} = g_2$. が成り立つことである．g と共役な G の元全体 $C(g)$ を G の g による**共役類**という．

命題 4.1　$g_1, g_2 \in G$ が互いに共役ならば，$\chi(g_1) = \chi(g_2)$ となる．この性質を満たす関数を G の**類関数**という．

定義 4.3　G の**交換子** $[g_1, g_2] := g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}$ 全体で生成される部分群 $D(G)$ を**交換子群**という．

$D(G)$ は G の正規部分群であり，商群 $G/D(G)$ は可換群となる．

定理 4.2　p を G から $G/D(G)$ への自然な射影とする．このとき G の１次元表現の指標 χ は，$G/D(G)$ の既約指標 χ_0 によって，$\chi = \chi_0 \circ p$ で与えられる．

5　指標の第 1 直交関係

$\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$ であることから指標の間に次のようにユニタリ内積が定義できる：

$$\langle \chi_1, \chi_2 \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_1(g)\chi_2(g^{-1}).$$

シュアーの補題より，指標に関する次の定理が得られる．

定理 5.1　(**指標の第 1 直交関係**) $\varpi_1, \varpi_2, \cdots$ を互いに同値でない既約表現とする．このとき，

$$\langle \chi_i, \chi_j \rangle = \delta_{ij}.$$

ここで，(1) より，χ の**既約分解**は次で書ける：

$$\chi = m_1\chi_1 + m_2\chi_2 + \cdots = \sum_i m_i\chi_i.$$

定理 5.2　$m_i = \langle \chi, \chi_i \rangle$ であり，χ の既約分解は一意的である．従って，２つの表現が同値であるための必要十分条件は，それらの指標が一致することである．

6　左正則表現

$G := \{g_1, \cdots, g_{|G|}\}$ の元を基底とする $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間を $\mathbb{C}[G] := \{(\lambda_g g)_{g \in G} \mid \lambda_g \in \mathbb{C}\}$ とする．$\mathbb{C}[G]$ の各基底 g_i に対し，$x \in G$ の作用 $g_i \mapsto xg_i$ により得られる表現 R を G の**左正則表現**という．$R(x)$ の，基底 $\{g_1, \cdots, g_{|G|}\}$ に関する表現行列 $(\alpha_{ij}(x))_{ij=1}^{|G|}$ $(x \in G)$ と，指標 Π は次のようになる：

$$\alpha_{ij}(x) = \begin{cases} 1 & (g_i = xg_j) \\ 0 & (g_i \neq xg_j) \end{cases}, \quad \Pi(x) = \begin{cases} |G| & (x = e) \\ 0 & (x \neq e) \end{cases}.$$

このことから，既約表現と左正則表現の関係が得られる．

定理 6.1　G の任意の既約表現 ϖ_i は G の左正則表現 R の既約成分 R_i で，その重複度は表現の次元に一致する．従って，R の指標 Π の既約分解は次になる：

$$\Pi = \sum_i (\dim R_i)\chi_i.$$

この定理から，互いに同値でない既約表現の個数が有限個であることが分かる．

系 6.2　$\varpi_1, \cdots, \varpi_N$ を互いに同値でない既約表現とする．このとき，次が成り立つ：

$$\sum_{i=1}^{N} (\dim\varpi_i)^2 = \sum_{i=1}^{N} (\dim\varpi_i)\chi_i(e) = |G|. \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{N} (\dim\varpi_i)\chi_i(g) = 0 \qquad (g \neq e).$$

7　指標の第 2 直交関係

次の定理は指標の関係を考える上で重要である．

定理 7.1　(**指標の第 2 直交関係**) $\varpi_1, \cdots, \varpi_N$ を互いに同値でない既約表現とする．G の g_i による共役類を $C(g_i)$ $(1 \leq i \leq t)$ とする．このとき，

$$\sum_{i=1}^{N} \chi_i(g_k)\chi_i(g_l^{-1}) = \delta_{kl}\frac{|G|}{|C(g_k)|} \quad (1 \leq k, l \leq t).$$

指標の第 1 直交関係と第 2 直交関係から，有限群の既約表現の個数に関する定理が得られる．

定理 7.2　G の互いに同値でない既約表現の個数は，G の共役類の個数に等しい．

8　交代群 $\mathcal{A}_4$ の既約指標

ここでは具体例として 4 次交代群 $\mathcal{A}_4$ の既約指標を全て見つける．$\mathcal{A}_4$ の共役類は，$C_1 = C(\mathbf{1})$，$C_2 = C((1\ \ 2)(3\ \ 4))$，$C_3 = C((1\ \ 2\ \ 3))$，$C_4 = C((1\ \ 3\ \ 2))$ であるので，互いに同値でない既約表現の個数は 4 つである．この各既約表現 ϖ_i $(1 \leq i \leq 4)$ の次元は，式 (2) から，$\sum_{1 \leq i \leq 4} (\dim\varpi_i)^2 = |\mathcal{A}|$ を解いて，

$$\dim\varpi_1 = \dim\varpi_2 = \dim\varpi_3 = 1, \quad \dim\varpi_4 = 3.$$

まず，３つの 1 次元表現を各共役類に対して求める．定理 4.2 より，1 次元表現は商群 $\mathcal{A}_4/D(\mathcal{A}_4)$ の表現によって定まる．$\tau = (1\ \ 2\ \ 3)$ とおくと $\mathcal{A}_4/D(\mathcal{A}_4) = \{D(\mathcal{A}_4), \tau D(\mathcal{A}_4), \tau^2 D(\mathcal{A}_4)\} \cong \langle \tau \rangle$ となる．よって，1 の原始 3 乗根を ω とすると，次で 1 次元表現が得られる：

$$\chi_i(\tau^n) = \omega^{(i-1)n} \qquad (1 \leq i \leq 3).$$

次に 3 次元表現の指標を求める．定理 5.1，式 (2) より，$\langle \chi_1, \chi_4 \rangle = \langle \chi_2, \chi_4 \rangle = \langle \chi_3, \chi_4 \rangle = 0$．$\langle \chi_4, \chi_4 \rangle = 1$，$\sum_{1 \leq i \leq 4} (\dim\varpi_i)\chi_i(\mathbf{1}) = |\mathcal{A}_4|$. これらを解いて，3 次元の指標 χ_4 を得る．

表 1　$\mathcal{A}_4$ の既約指標

	C_1	C_2	C_3	C_4
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	ω	ω^2
χ_3	1	1	ω^2	ω
χ_4	3	-1	0	0

9　おわりに

群の表現論の 1 つの目標として，与えられた群の既約表現を全て見つけて分類することがある．本研究では簡単な群の既約表現の分類をすることができた．しかし，一般の群 G の既約表現を見つけるためには，既約でない表現 ϖ から作り出す必要がある．実際に既約でない表現 ϖ を与える手法として，G の部分群 H に与えられた表現 ϖ_H から G の表現を誘導する手法がある．

参考文献

[1] 平井武：『すうがくぶっくす 20　線形代数と群の表現 』．朝倉書店，東京，2001.

[2] 桂利行：『大学数学の入門　代数学　環上の加群』．東京大学出版会，東京，2007.

[3] 堀田良之：『数学シリーズ　代数入門―群と加群―』．裳華房，東京，1987.