確率論の基礎理論

2005MM004 浅野礼士朗

指導教員：宮元 忠敏

1 はじめに

現代確率論は, ルベーグの測度論・積分論に基づいて構成されている. 確率論において, 確率測度とは, 可測空間 (X, F) に対し, X 上で定義され $P(X) = 1$ を満たす測度 P のことである. このように「ものを測る」とは何かという土台がしっかりと固められたため, 現代確率論の飛躍的発展につながった。今日では統計力学や集団遺伝学, 数理ファイナンスといった幅広い分野の研究と結びついている.

本研究では参考文献 [1], [2], [3] を用いて, 確率論の思想の源であるルベーグ測度論・積分論の基本的定理の理解を深めていくことを目的としている。「ルベーグ積分」を理解し, 使えるようにすることで確率論への自然なステップアップが可能だと考えている.

2 諸定義，諸定理

2.1 f-集合体

X の部分集合族 A が次の 3 条件を満たすとき, X の f-**集合体**という.

$(A.1)$ $\emptyset \in A$

$(A.2)$ $E \in A$ ならば $E^c \in A$

$(A.3)$ $E_1 \in A, E_2 \in A$ ならば $E_1 \cap E_2 \in A$

X の部分集合族 B が f-集合体であってさらに次の条件を満たすとき, X の σ-**集合体**という.

$(B.1)$ $E_n \in B\ (n \geq 1)$ ならば $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in B$

2.2 ボレル集合体

$X = R^d$ とする. R^d のすべての開集合を含む最小の σ-集合体を R^d の**ボレル集合体**といい, $B(R^d)$ とあらわす.

2.3 ルベーグ測度

$A \subset R^d$ に対して

$$\lambda^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|J_n| : \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \supset A(J_n \text{は}\ d-\text{次元区間})\right\}$$

とおき, A の**ルベーグ外測度**という. $\lambda^*(A)$ は A の d-次元区間の可算被覆で定めている.

定理 1 次の条件を満たす $B(R^d)$ 上の集合関数 λ は一意的に存在する.

$(\lambda.1)$ $0 \leq \lambda(E) \leq \infty \quad (E \in B(R^d)), \lambda(\emptyset) = 0$

$(\lambda.2)$ $E_n \in B(R^d)(n = 1, 2, \cdots), \quad E_n \cap E_m = \emptyset \quad (n \neq m)$ ならば
$\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$

$(\lambda.3)$ 任意の $E \in B(R^d)$ に対して
$\lambda(E) = \lambda^*(E)$

このようにして定まる $B(R^d)$ 上の集合関数 λ を R^d 上の**ルベーグ測度**という. また $(R^d, B(R^d), \lambda)$ を**ルベーグ測度空間**という.

2.4 一般の測度空間

ある集合 X の σ-集合体 F 上で定義された集合関数 m が次の条件を満たすとき, m を可測空間 (X, F) 上の**測度**, (X, F, m) を**測度空間**という.

$(m.1)$ $m(\emptyset) = 0, 0 \leq m(E) \leq \infty \quad (E \in F)$

$(m.2)$ $E_n \in F \quad (n = 1, 2, \cdots), \quad E_n \cap E_m = \emptyset (n \neq m)$ ならば $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$

さらに次の条件を満たすとき,m は σ-**有限測度**という.

$(m.3)$ $m(X_n) < \infty$ を満たす $X_n \in F (n = 1, 2, \cdots)$ が存在し $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$

2.5 可測関数

関数 $f : X \to [-\infty, \infty]$ は次の条件を満たすとき**可測関数**という.

$$\text{任意の実数}\ a\ \text{に対し}\ \{x \in X | f(x) > a\} \in F$$

定理 $2\{f_n\}_{n\geq 1}$ は可測関数列のとき

(@) $\sup_{n\geq 1} f_n(x), \quad \inf_{n\geq 1} f_n(x)$ も可測関数である.

(A) $\limsup_{n\geq 1} f_n(x), \quad \liminf_{n\geq 1} f_n(x)$ も可測関数である.

(B) $\{f_n\}_{n\geq 1}$ がある関数 f に各点で収束すれば，f も可測関数である.

2.6 単純関数

関数 $f : X \to (-\infty, \infty)$ が有限個の値しかとらないとき, **単純関数**という.

定理 3 非負関数 $f : X \to [0, \infty]$ が可測ならば, 非負単純関数列 $\{f_n\}$ が存在し, 各点 $x \in X$ で $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ は単調非減少かつ $f(x)$ に収束する.

2.7 積分の定義

まず, 最も単純な可測関数は $A \in F$ に対する定義関数 $f = I_A$ であるから, この関数に対する積分を

$$\int_X f(x)m(dx) = m(A)$$

と定める. さらに非負単純関数 $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i I_{A_i}(x)$ $(a_i \geq 0, A_i \in F, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j)$ に対しては積分を

$$\int_X f(x)m(dx) = \sum_{i=1}^{n} a_i m(A_i)$$

と定める. 非負可測関数 f に対しては, 定理 3 より非負単純関数の単調非減少列 $\{f_n\}$ で近似できるため

$$\int_X f(x)m(dx) = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)m(dx)$$

としてその積分値を定める.

定理 4　$\{f_n\}_{n\geq 1}, \{g_n\}_{n\geq 1}$ はともに非負単純関数の単調非減少列で

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) \leq \infty (x\in X)$ ならば

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)m(dx) = \lim_{n\to\infty}\int_X g_n(x)m(dx) \leq \infty$$

この定理により任意の非負可測関数 f の積分は f を近似する任意の非負単純関数の列 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ で定義される.

一般の可測関数 f に対しては, 3 つの非負可測関数

$f^+ = \max\{f, 0\}, f^- = -\min\{f, 0\}, |f| = f^+ + f^-$

を用いる. これらの積分は定義できるので,

$\int_X |f(x)|m(dx) < \infty$ ならば, f は m-**可積分**といい

$$\int_X f(x)m(dx) = \int_X f^+(x)m(dx) - \int_X f^-(x)m(dx)$$

と定める.

3　収束定理

ルベーグ積分が重要視される主な理由は，この収束定理の威力のためだと言われている．この定理は積分と極限操作の交換可能性を述べているものであり，近代解析学の基礎をなすものとなっている．

3.1　単調収束定理

定理 5(単調収束定理)　$\{f_n\}$ はともに非負単純関数の非減少列, すなわち

$0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad (x\in X, n\geq 1)$

このとき

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)m(dx) = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n(x)m(dx)$$

3.2　ルベーグの収束定理

定理 6(ファトウの補題)　$\{f_n\}$ は非負可測関数列とするとき

$$\liminf_{n\to\infty}\int_X f_n(x)m(dx) \geq \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n(x)m(dx)$$

ファトウの補題を用いれば，次の定理を証明することができる．

定理 7(ルベーグの収束定理)　m-可積分関数列 $\{f_n\}$ と可測関数 f は次の条件をみたす.

(@) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad (x\in X)$

(A) 非負 m-可積分関数 g が存在し $|f_n(x)| \leq g(x) \quad (x\in X, n\geq 1)$

そのとき f も m-可積分で

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)m(dx) = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n(x)m(dx)$$

単調収束定理やルベーグの収束定理を次の形で述べることも有用である。

定理 7'

(@) 非負可測関数の列 $\{f_n\}$ に対し

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) m(dx) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n(x)m(dx)$$

(A)m-可積分関数の列 $\{f_n\}_{n\geq 1}$g が

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_X |f_n(x)|m(dx)$$

ならば $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ も m-可積分関数で

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) m(dx) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n(x)m(dx)$$

(B)m-可積分関数 f と $E_n\cap E_m = \emptyset (n\neq m)$ をみたす可測集合の列 $\{E_n\}_{n\geq 1}$ に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f(x)m(dx) = \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f(x)m(dx)$$

4　$a.e.$ 収束

測度空間 (X, F, m) 上で定義された可測関数 f や可測関数の列 $\{f_n\}$ に関する命題が，$m(E) = 0$ をみたすある集合 $E\in F$ の点を除くすべての点で成り立つとき，その命題は m に関して**ほとんど到るところ** (almost everywhere) 成立するといい，$m - a.e. x\in X$ とあらわす.

可測関数列 $\{f_n\}$ がほとんど到るところで f に収束するとき

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad m - a.e. x\in X$$

とあらわし，$\{f_n\}$ は f に $m - a.e.$ **収束** (概収束) するという．これは

$$m(x\in X|\{f_n\}\text{は}\quad n\to\infty\text{のとき} f(x)\text{に収束しない}) = 0$$

の意味である．

単調収束定理やルベーグの収束定理において可測関数の列 $\{f_n\}$ は各点 $x\in X$ で収束することを仮定したが，これは $m - a.e.$収束 に置き換えられる．

5　おわりに

本研究では, ルベーグ測度を用いたルベーグ積分の導入，さらにルベーグ積分の中でも重要なルベーグの収束定理，フビニの定理の証明まで到達することができた．今後はこれらの知識を基にして展開される確率論の議論にも進んでいきたいと考えている．

参考文献

[1] 志賀徳造：『ルベーグ積分から確率論』．共立出版株式会社，2000.

[2] 舟木直久：『確率論』．浅倉書店，2004.

[3] 新井仁之：『ルベーグ積分講義―ルベーグ積分と面積 0 の不思議な図形たち―』．日本評論社，2003.