

直観主義論理

2005MM003 朝比奈佑樹

指導教員：佐々木克巳

1 はじめに

直観主義論理とは、従来の論理学(古典論理)はすべてのものの真偽が明確になる「神の論理」であるとしてもっと慎ましやかに人間の立場の論理学を考えようということ提唱されたものである。

ここでは、小野 [1] にしたがって、直観主義論理の形式体系(シンタクス)およびセマンティクスを導入し、それらの関係を示す。第2節ではその形式体系として LJ を導入し、その性質を示す。第3節では、そのセマンティクスとしてクリプキ・フレームを導入しその性質を示す。第4節で、それらの関係、すなわち、完全性定理を証明する。

2 体系 LJ

直観主義論理の形式体系としてゲンツェンの導入した LJ を採用する。

まず、論理式を定義する。

定義 2.1 (論理式)

- 1) それぞれの命題変数は、論理式である。
- 2) A, B がともに論理式ならば $(A \wedge B), (A \vee B), (A \supset B), (\neg A)$ はいずれも論理式である。

次に、式を導入する。 LJ における式は、 A_i, B を論理式として ($i = 1, \dots, m$)、

$$A_1, \dots, A_m \rightarrow B$$

の形である。ただし、 m は0でもよく、また右辺の B はなくてもよい。上の式の直観的な意味は、 A_1 から A_m までを仮定すると B が導かれるということである。

定義 2.2 LJ の始式は、 $A \rightarrow A$ の形の式とする。

定義 2.3 (LJ の証明図と証明可能性) 始式から出発し、それに推論規則(小野 [1] 参照)を次々に適用していく過程をすべて記述したものを LJ の証明図という。推論規則の中には上式が二つあるものがあるから、一般に証明図は高々二つに枝分かれする木の形をしていることになる。証明図の一番下にある式を、その証明図の終式という。そして式 S を終式とするような証明図が存在するときには、 S は LJ で証明可能であるという。さらに式 $\rightarrow A$ が LJ で証明可能であるとき、論理式 A が LJ で証明可能という。

3 直観主義のクリプキ・フレーム

空でない集合 M の上の二項関係 \vDash が順序であるとは、任意の $a, b, c \in M$ に対し

- 1) (反射律) $a \vDash a$
- 2) (推移律) $a \vDash b$ かつ $b \vDash c$ ならば $a \vDash c$
- 3) (反対称律) $a \vDash b$ かつ $b \vDash a$ ならば $a = b$

をみたすことである。また、このとき対 (M, \vDash) を順序集合という。

さて、任意の順序集合 (M, \vDash) のことを直観主義論理のクリプキ・フレーム(または単にフレーム)という。 M の要素を可能世界という。

次に遺伝的であるということを説明する。集合 M の部分集合 U が遺伝的であるとは、 $x, y \in M$ に対して

$$x \in U \text{ かつ } x \vDash y \text{ ならば、 } y \in U$$

が成り立つこととする。

各命題変数 p に対し、 M の遺伝的部分集合 $V(p)$ を対応させるような写像 V を、フレーム (M, \vDash) 上の付値という。 V が (M, \vDash) 上の付値であるとき、三つ組 (M, \vDash, V) を直観主義論理のクリプキ・モデルという。与えられたクリプキ・モデル (M, \vDash, V) に対し、 M の要素と論理式の間関係 \vDash を次のように定義する。

- 1) $a \vDash p \Leftrightarrow a \in V(p)$
- 2) $a \vDash A \wedge B \Leftrightarrow a \vDash A$ かつ $a \vDash B$
- 3) $a \vDash A \vee B \Leftrightarrow a \vDash A$ または $a \vDash B$
- 4) $a \vDash A \supset B \Leftrightarrow a \vDash b$ となるすべての b に対し $b \vDash A$ または $b \vDash B$
- 5) $a \vDash \neg A \Leftrightarrow a \vDash b$ となるすべての b に対し $b \not\vDash A$

関係 \vDash は写像 V から一意的に決まるので、今後は \vDash と V を同一視して \vDash を付値とよんだり (M, \vDash, \vDash) をクリプキ・モデルといたりすることにする。

定理 3.1 \vDash をフレーム (M, \vDash) の付値とする。このとき任意の論理式 A に対し、集合 $\{x \in M \mid x \vDash A\}$ は遺伝的である。

この証明は小野 [1] にしたがって理解し、卒業論文にまとめた。

クリプキ・モデル (M, \vDash, \vDash) において、どんな $a \in M$ についても $a \vDash A$ となるとき、論理式 A は (M, \vDash, \vDash) で真であるという。そうでなければ、 A は (M, \vDash, \vDash) で偽であるという。定理 3.1 より、順序集合 (M, \vDash) に最小元 0 が存在するときには、 A が (M, \vDash, \vDash) で真になるための必要十分条件は $0 \vDash A$ である。

4 完全性定理

この節では、 LJ の完全性定理を述べるために LJ の健全性、 LJ の完全性を証明する。

定義 4.1 LJ の式 $\Gamma \rightarrow A$ (または $\Gamma \rightarrow$) は、フレーム (M, \vDash) で論理式 $\Gamma_* \supset A$ (または $\neg \Gamma_*$) が恒真であるとき、 (M, \vDash) で恒真であるという。ただし、 Γ_* は Γ の論理式をすべて論理積で結んだものである。

定理 4.1 任意の式 $\Gamma \rightarrow A$ に対し、 $\Gamma \rightarrow A$ が直観主義論理 LJ で証明可能となるための必要十分条件は $\Gamma \rightarrow A$ が任意のフレームで恒真となることである。

定理 4.1 を示すには、つぎの健全性と完全性を示せばよい。完全性はより強い定理にしてある。

定理 4.2 (LJ の健全性) 式 $\Delta \rightarrow A$ が LJ で証明可能ならば、 $\Delta \rightarrow A$ は任意のフレームで恒真である。

定理 4.3 (LJ の完全性) $\Gamma \rightarrow A$ が任意の有限フレームで恒真であるならば、式 $\Gamma \rightarrow A$ は LJ で証明可能である。

定理 4.2 の証明

$\Delta \rightarrow A$ を終式とする証明図 P の構成に関する帰納法で証明する。

i) P が始式 $A \rightarrow A$ のみから構成されるとき、 $0 \models A \supset A$ となることを示すために、背理法を用いて、 $0 \not\models A \supset A$ を仮定し、矛盾を示す。

ii) i) 以外するとき、 P の終式を導く推論規則 I が存在する。 I の種類によって場合分けして、 $\Gamma \rightarrow A$ が任意のフレームで恒真であることを示す。ここでは小野 [1] では述べられていない場合から (\supset 右) のみを証明しておく。

I が (\supset 右) のとき、 I は次の形をしている。

$$\frac{B, \Gamma \rightarrow C}{\Gamma \rightarrow B \supset C} (\supset \text{右})$$

$0 \models B \wedge \Gamma_* \supset C$ ならば $0 \models \Gamma_* \supset (B \supset C)$ を示すために背理法を用いて $0 \models B \wedge \Gamma_* \supset C$ と $0 \not\models \Gamma_* \supset (B \supset C)$ を仮定して矛盾を導く。

$0 \not\models \Gamma_* \supset (B \supset C)$ より $0 \not\models a$ となるある a に対し $a \models \Gamma_*$ かつ $a \not\models B \supset C$ となる。 $a \not\models B \supset C$ より $a \not\models b$ となるある b に対し $b \models B$ かつ $b \not\models C$ となる。 $0 \models B \wedge \Gamma_* \supset C$ より $0 \models c$ となるすべての c に対し $c \models B \wedge \Gamma_*$ または $c \models C$ となる。推移律より $0 \models a, a \models b$ なので $0 \models b$ となる。 $0 \models b$ なので $b \models B \wedge \Gamma_*$ または $b \models C$ である。 $b \not\models B \wedge \Gamma_*$ のとき、 $b \not\models B$ または $b \not\models \Gamma_*$ となる。 $b \not\models B$ のとき、 $b \models B$ に矛盾している。 $b \not\models \Gamma_*$ のとき、遺伝的なので $a \not\models \Gamma_*$ となる。しかしこれは $a \models \Gamma_*$ に矛盾している。

$b \models C$ のとき、 $b \not\models C$ に矛盾している。

定理 4.3 の証明には準備が必要である。

論理式 $\Gamma \supset D$ (D が空のとき、は $\neg \Gamma_*$) を A とし、 A の部分論理式全体の集合を $\Psi(A)$ とおく。明らかに $\Psi(A)$ は有限集合である。 $\Psi(A)$ の部分集合 $U = \{A_1, \dots, A_m\}$ および $V = \{B_1, \dots, B_n\}$ に対し、式

$$A_1, \dots, A_m \rightarrow B_1 \vee \dots \vee B_n$$

が LJ で証明可能でないとき、 (U, V) は (LJ で) 無矛盾であるといい、さらに $U \cup V = \Psi(A)$ であるとき、 (U, V) は (LJ で) $\Psi(A)$ - 極大無矛盾であるという。

補助定理 4.1 対 (U_0, V_0) が無矛盾のとき、 $U_0 \subseteq U$ かつ $V_0 \subseteq V$ となる $\Psi(A)$ の部分集合 U と V が存在して、 (U, V) は $\Psi(A)$ - 極大無矛盾になる。

この証明は小野 [1] にしたがって理解し、卒業論文にまとめた。

ここで、 $M^* = \{U(\subseteq \Psi(A)) \mid (U, \Psi(A) - U) \text{ は } \Psi(A) \text{ - 極大無矛盾}\}$ とする。 (M^*, \subseteq) は有限フレームになる。

補助定理 4.2 M^* の任意の要素 U に対し、次の 1) から 5) が成り立つ。

- 1) 論理式 A_1, \dots, A_m が U に属し B が $\Psi(A)$ に属するとき、式 $A_1, \dots, A_m \rightarrow B$ が LJ で証明可能ならば B も U に属する。
- 2) $B \wedge C \in \Psi(A)$ のとき、 $B \wedge C \in U \Leftrightarrow B \in U$ かつ $C \in U$
- 3) $B \vee C \in \Psi(A)$ のとき、 $B \vee C \in U \Leftrightarrow B \in U$ または $C \in U$
- 4) $B \supset C \in \Psi(A)$ のとき、 $B \supset C \in U \Leftrightarrow U \subseteq V$ となるすべての $V \in M^*$ に対し $B \notin V$ または $C \in V$
- 5) $\neg B \in \Psi(A)$ のとき、 $\neg B \in U \Leftrightarrow U \subseteq V$ となるすべての $V \in M^*$ に対し $B \notin V$

この証明は小野 [1] では 4) の証明が述べてあるが、ここでは小野 [1] で述べられていない 2) を示す。

2) 左から右

$B \wedge C \in U$ を仮定し、 $B \in U$ かつ $C \in U$ を示す。 $B \wedge C \rightarrow B$ は証明可能なので、1) より $B \in U$ となる。 $B \wedge C \rightarrow C$ は証明可能なので、1) より $C \in U$ となる。これらのことから $B \in U$ かつ $C \in U$ となる。

右から左

$B \in U$ かつ $C \in U$ ならば $B \wedge C \in U$ を示す。 $B, C \rightarrow B \wedge C$ は証明可能なので 1) より $B \wedge C \in U$ となる。

さて、以上の補助定理を用いて定理 4.3 を示す。フレーム (M^*, \subseteq) 上の付値 \models を、 p が $\Psi(A)$ が属する命題変数ならば

$$(1) U \models p \Leftrightarrow p \in U$$

と定め、 p が $\Psi(A)$ に属さない命題変数のときには $U \not\models p$ と定める。このように定義すれば

$$U \models p \text{ かつ } U \subseteq V \text{ ならば、 } V \models p$$

が成り立つから、 \models は確かに付値の条件を満たしている。そして、 $\Psi(A)$ に属する任意の論理式 B に対し

$$(2) U \models B \Leftrightarrow B \in U$$

が成り立つ ((2) の証明は小野 [1] では述べられていないが、卒業論文にまとめてある)

いま、 $\Gamma \rightarrow D$ が LJ で証明可能でないならば、明らかに A も LJ で証明可能でない。したがって対 $(\emptyset, \{A\})$ は無矛盾である。ここで、補助定理 4.1 を使えば、ある $U_0 \in M^*$ が存在して $A \notin U_0$ である。ここで (2) において、 $U = U_0$ 、 $B = A$ とすれば $U_0 \not\models A$ が得られる。したがって $\Gamma \rightarrow D$ は有限フレーム (M^*, \subseteq) で偽になる。

参考文献

- [1] 小野寛晰: 『情報科学における論理』. 日本評論社, 1994.