様々なリスク尺度を用いたポートフォリオ選択問題

2004MM075 鈴木啓之　2004MM076 鈴木健晃
指導教員：澤木勝茂

1 はじめに

日本の金利は世界的に見ても低水準である．銀行から融資を受ける企業やローンを考えている個人にとっては有利な環境である．しかし，銀行預金や国債では，個人の資産を増やすことは難しくなっている．なぜなら，これらの資産のリターン (期待収益率) である利息がほとんどつかないからである．この状況から，これからの資産運用はただ保持しているだけでなく投資も考えなければならない．事実，一時期は投資による資産運用が流行した．しかし，投資では利益を得た人と同時に損益を出した人が必ずいるはずである．そのようにならないためにも事前にリスクを考慮したポートフォリオ（投資比率）を考える必要がある．

そこで本研究では複数のリスク尺度を用いて株式投資のリスクを測り，最適なポートフォリオ選択問題を解く．そして，求めたポートフォリオ（投資比率）を市場に当てはめて運用をし，結果について研究する．

2 ２パラメータ・アプローチについて

本研究では，２パラメータ・アプローチ [1] を用い，望む収益率とリスクの観点から最適なポートフォリオを定める．そのため、リターン（期待収益率）とリスクを2つのパラメータとし，それらを変化させることによって最適なポートフォリオ（投資比率）がどのように変化するかを観察する．この最適なポートフォリオは,「要求される期待収益率のもとで，リスクを最小化する」という数理計画問題を解くことによって求めることができる．

本研究で扱うモデルを分類すると「分散モデル」,「絶対偏差モデル」,「下方リスクモデル」,「安全第一基準モデル」,「区分線形モデル」となる．

3 記号の定義

第 5 章で用いる記号を以下のように定義する

n : 資産数

x_j : 資産 j の投資比率 $(j = 1, 2, \cdots, n)$

r_E : 要求期待収益率

r_{jt} : 事象 t における資産 j の収益率 $(t = 1, 2, \cdots, T)$

r_t : 事象 t における収益率 $(t = 1, 2, \cdots, T)$

$\bar{r}_j$: 資産 j の期待収益率

$\bar{r}_p$: ポートフォリオの期待収益率

$$\bar{r}_p = \sum_{j=1}^{n} \bar{r}_j x_j$$

r_G : 目標収益率

d_t : 目標収益率を下回る大きさを表す変数

k,λ : リスク選好の度合

D_{ave} : $|r_t - r_G|_-$ の平均値

D_{max} : $|r_t - r_G|_-$ の最大値

$R(x)$: 不達成確率

M : $M > r_G - \min\{r_t\}$ を満たす値

w_t : t 時点の収益率とポートフォリオ期待収益率の差

$\rho_{q^-,q^+}(w)$: 区分線形モデルを表す関数

4 制約空間の定義

第 5 章で用いる制約空間を以下のように定義する．

$Y = \{r_t + y_t \geq \bar{r}_p\ ,\ y_t \geq 0\ ;\ t = 1, ..., T\}$
：絶対偏差モデル，下方半分散モデル y_t の制約空間 Y

$D = \{r_t + d_t \geq r_G, d_t \geq 0; t = 1, ..., T\}$
：下方部分積率モデル，オープン L 偏差モデル
d_t の制約空間 D

$Z = \{r_t + M \cdot z_t \geq r_G, z_t \in \{0, 1\}; t = 1, ..., T\}$
：*Roy* モデル z_t の制約空間 Z

5 モデルの定式化

5.1 分散モデル

分散モデル [1, 2] は，期待効用最大化の原理に基づき，効用関数を用いてポートフォリオを選択するモデルである．しかしここでは，効用関数の代わりに投資者が要求する期待収益率を定め，そのリスクを最小にする最適ポートフォリオを求める．

ポートフォリオの期待収益率 $\bar{r}_p$ が要求される期待収益率 r_E 以上のもとで，リスク尺度である分散 Var を最小化する最適な投資比率 x^* を求める．

$y_t = \sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j - \bar{r}_p$ とおき，分散モデルは以下のように定式化される．

$$min \quad Var = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} y_t^2 \tag{1}$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j - y_t = \bar{r}_p \quad (t = 1, 2, \cdots, T) \tag{2}$$

$$\bar{r}_p \geq r_E \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \tag{4}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{5}$$

制約条件 (3) 式〜(5) 式のもとで，目的関数 (1) 式を最小化する．(2) 式は事象 t で，投資比率 x^* を用いて投資した場合の収益率から y_t を引いた差とポートフォリオの期

待収益率 $\bar{r}_p$ が等しくなる制約条件．つまり，全ての t 事象において y_t は収益率の差を取ることによってポートフォリオの期待収益率に調整する変数を表す．(3) 式はポートフォリオの期待収益率は，定める期待収益率以上である制約条件．また，(4) 式は資金の制約条件である．最後に，(5) 式は非負条件を表し，これは空売りを禁止するための制約条件である．

5.2 絶対偏差モデル

絶対偏差モデル [1, 2] は，投資家のリスク指標として，絶対偏差を定義したモデルである．分散モデルは 2 次計画法を利用しなければならないのに対し，このモデルでは線形計画法で問題を解くことが出来る．

ポートフォリオの期待収益率 $\bar{r}_p$ が要求期待収益率 r_E 以上のもとで，$y_t \geq 0$ を満たす絶対偏差 AD を最小化する最適な投資比率 x^* を求める．

$y_t = |r_t - \bar{r}_p|$ とおき，制約空間 Y を用い，絶対偏差モデルは以下のように定式化される．

$$min \quad AD = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t \tag{6}$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} r_{jt}x_j + y_t \geq \bar{r}_p \ \ (t = 1, 2, \cdots, T) \tag{7}$$

$$y_t \geq 0 \tag{8}$$

(3)〜(5) 式

制約条件の (7) 式は，t 事象における銘柄全体の収益率からリスクである y_t を足した値が常にポートフォリオの期待収益率以上になる条件である．つまり，全ての t 事象での銘柄全体の収益率を，リスクを考慮してもポートフォリオの期待収益率を満たすようにする．(8) 式は y_t の非負条件である．

5.3 下方リスクモデル

この章では下方リスクモデル [3] である下方半分散モデル [1, 3]，下方部分積率モデル [1, 3]，オープン L 偏差モデル [1, 3] を扱う．

5.3.1 下方半分散モデル

期待値以下になるばらつきの大きさをリスク尺度として用いることができる．それを下方半分散 (semi-variance) と呼ぶ．ポートフォリオの期待収益率を下回る値をリスクとして捉え，下方半分散 $SVar$ を最小化する最適な投資比率 x^* を求める．

$y_t = |r_t - \bar{r}_p|_-$ とおき，制約空間 Y を用い，下方半分散モデルは以下のように定式化される．

$$min \quad SVar = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} d_t^2 \tag{9}$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} r_{jt}x_j + y_t \geq \bar{r}_p \ \ (t = 1, ..., T) \tag{10}$$

$$y_t \geq 0 \ \ (t = 1, ..., T) \tag{11}$$

(3)〜(5) 式

5.3.2 下方部分積率モデル

下方部分積率モデルは下方部分積率 (lower partial moments) を用いており，次数 k を高く設定することでよりリスクを排除した分散投資ができるモデルである．目標収益率 r_G を下回る大きさをリスクと捉え，下方部分積率 LPM を最小化する最適な投資比率 x^* を求める．

$d_t = |r_t - \bar{r}_p|_-$ とおき，制約空間 D を用い，下方部分積率モデルは以下のように定式化される．

$$min \quad LPM_k = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} (d_t)^k \tag{12}$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} r_{jt}x_j + d_t \geq r_G \ \ (t = 1, ..., T) \tag{13}$$

$$d_t \geq 0 \ \ (t = 1, ..., T) \tag{14}$$

(3)〜(5) 式

5.3.3 オープン L 偏差モデル

オープン L 偏差モデルは目標収益率を下回る収益率分をリスクと考えるが，投資を考える人によってそのリスクの程度は様々である．例えば，目標収益率の不足分の平均値をリスクとしたり，平均値ではなく最大値とすることがある．また，平均値と最大値の中間値をリスクと考えることもできる．目標収益率の不足分の平均値と最大値に重みをつけたものをリスクと捉え，オープン L 偏差 OLD を最小化する最適な投資比率 x^* を求める．ここで

$$d_t = |r_t - \bar{r}_p|_- \tag{15}$$

$$D_{ave} = \min\left\{ \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} d_t \middle| d_t \in D \right\} \tag{16}$$

$$D_{max} = \min\{d_{max} \mid d_t \in D, d_t - d_{max} \leq 0, d_{max} \geq 0\} \tag{17}$$

とおき，制約空間 D を用い，オープン L 偏差モデルは以下のように定式化される．

$$min \quad OLD_\lambda = (1-\lambda)\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} d_t\right) + \lambda \cdot d_{max} \tag{18}$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} r_{jt}x_j + d_t \geq r_G \ \ (t = 1, ..., T) \tag{19}$$

$$d_t - d_{max} \leq 0 \ \ (t = 1, ..., T) \tag{20}$$

$$d_t \geq 0 \ \ (t = 1, ..., T) \tag{21}$$

$$d_{max} \geq 0 \tag{22}$$

(3)〜(5) 式

5.4 安全第一基準モデル

5.4.1 Roy モデル

Roy モデル [1] は、不達成確率をリスク尺度とする安全第一基準モデル [1]（safety first mode）の一つである。不達成確率とは，収益率が目標収益率を下回る確率のことである．このモデルは「期待収益率の下限制約付き・不達成確率最小化モデル」に相当する．つまり，目標収益

率 r_G を下回る不達成確率を最小化する最適な投資比率 x^* を求める．

$Prob(a)$ は条件 a が成り立つ確率を表す．I_a を a の条件が成立していれば 1，成立しなければ 0 となる関数とすると，制約空間 Z を用い，

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} I_{\{r_t<r_G\}} = \min\left\{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} z_t \middle| z_t \in Z\right\}$$

とおき，Roy モデルは以下のように定式化される．

$$\begin{aligned}
min \quad & Prob(R(x) < r_G) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} z_t \\
s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} r_{jt}x_j + M \cdot z_t \geq r_G \ \ (t=1,...,T) \\
& z_t \in \{0,1\} \ \ (t=1,...,T) \\
& \text{(3)〜(5) 式}
\end{aligned}$$

5.5　区分線形モデル

区分線形モデル [1] は，非対称なリスクを測るためのより一般的な尺度として，区分線形･2 次リスク尺度 (piecewise linear-quadratic risk vmeasure) を示している．収益率について 3 通りに場合分けをし，3 通りの合計つまり二次リスクを最小化する区分線形 PLQ の最適な投資比率 x^* を求める．

$w_t = r_t - \bar{r}_p$ とおき，次のように場合分けをする。

$$\rho_{q^-,q^+(v_t,v_t^-,v_t^+)} = \begin{cases} \frac{1}{2}(q^-)^2 - q^-v_t^- & (w_t \leq q^-) \\ \frac{1}{2}v_t^2 & (q^- \leq w_t \leq q^+) \\ \frac{1}{2}(q^+)^2 + q^+v_t^+ & (q^+ \leq w_t) \end{cases}$$

区分線形モデルは以下のように定式化される．

$$min \quad PLQ(R;q^-,q^+) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{1}{2}v_t^2 - q^-v_t^- + q^+v_t^+\right) \tag{23}$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} r_{jt}x_j - w_t = \bar{r}_p \ \ (t=1,...,T) \tag{24}$$

$$w_t = v_t - v_t^- + v_t^+ \ \ (t=1,...,T) \tag{25}$$

$$q^- \leq v_t \leq q^+ \ \ (t=1,...,T) \tag{26}$$

$$v_t^- \geq 0, v_t^+ \geq 0 \ \ (t=1,...,T) \tag{27}$$

(3)〜(5) 式

6　分析

6.1　数値解析

各モデルに数値を代入し，過去 3 年間の月間収益率データを用い，2004 年から 2007 年まで期待収益率の値を 1.0 %から 2.0 %までの各投資比率を算出する．データは，株式投資収益率 [4] の東証第一部 28 業種を用いる．それぞれの業種の平均を取り，それを銘柄とした．

ここでは，2007 年度期待収益率 2.0 %の投資比率を考察する．図 1 は，投資比率を示したグラフである．

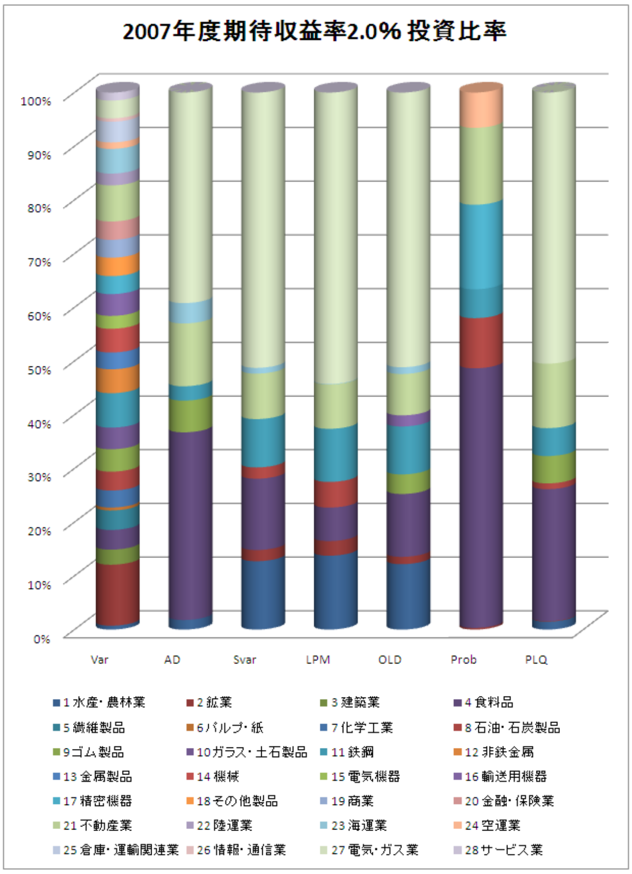

図 1　2007 年度期待収益率 2.0 % 投資比率

- 考察

全体的に収益率が高い銘柄を中心に分散投資をしている．分散モデルを除いたリスク尺度は投資比率上位 3 銘柄で半分以上の投資比率を占める．これは，期待収益率の 2.0 %を超える銘柄が限られるからである．そのような中で，分散モデルは全体的に月間収益率が高かったこともあり，リスクが高い銘柄の中で安定した収益率が見込める銘柄に投資をし，収益率 1.5 %付近の多くの銘柄に分散投資をすることにより，リスクを減らしている．

下方リスクモデルの投資比率は，下方リスクが少ない安定している食料品と電気・ガス業の割合を高めることによってリスクを抑え，逆にリスクと利益が共に高い不動産業と水産・農林業に投資をすることによってバランスをとっている．しかし，このリスク尺度の中では分散が多い水産・農林業に投資をしているため，リスクが高くなっている．

Roy モデルは他のリスク尺度と大きく異なる投資比率となる．目標収益率を下回る確率をリスクとするので分散のリスクが高まってもリスクとみられない．よって収益率が高く，また目標収益率を下回る可能性が低い銘柄が選ばれたため，電気・ガス業よりも食料品に投資が高まり，他とは異なる投資比率となった．

絶対偏差モデルと区分線形モデルは，安定している電気・ガス業と食料品に投資を強め，残りを利益が高い不動産業に割り振っている．比較的に変動が少ない投資をしている．

6.2　シミュレーション

2004 年から 2007 年までの各年度のデータを用い，実際にシミュレーションをおこない，1 年ごとの資産を算出した．2004 年から 2007 年まで 1 年ごとに各期待収益率で投資比率を変え，各リスク尺度で運用した結果の総合利益と平均リスクが図 2 と図 3 と図 4 である．

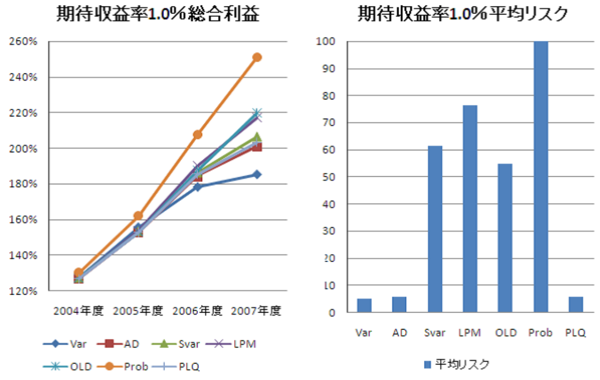

図 2　期待収益率 1.0 %総合利益と平均リスク

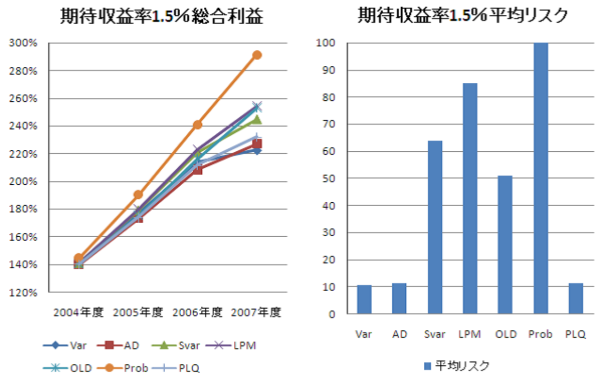

図 3　期待収益率 1.5 %総合利益と平均リスク

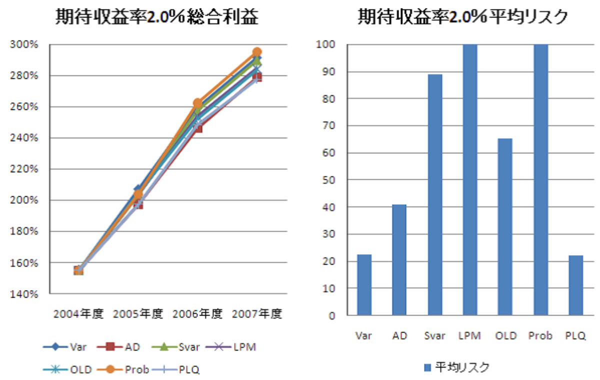

図 4　期待収益率 2.0 %総合利益と平均リスク

6.3　考察

分散モデルは全てのリスク尺度で平均リスクが低く，収益率も低い．しかし，期待収益率 2.0 %のときには他のリスク尺度を抑え，2 番目に収益率が高い結果となった．銘柄全体の年間収益率が高い場合，分散モデルは他のリスク尺度よりも広く分散投資をおこなうことにより，分散を少なくできたからである．また，他のリスク尺度は収益率が高い銘柄に投資が集中した結果，似たような収益率になっている．下方リスクモデルの 3 つのモデルは平均リスク，収益率共に近い値になることが多い．その中でもオープン L 偏差モデルはリスク当たりの収益率が常に高いのでバランスが良い． 3 つの期待収益率の中で Roy モデルの収益が一番高かったが，リスクも高くなっている．これは Roy モデルは他のリスク尺度と違い，期待収益率や目標収益率という基準線からの収益率との距離を用いてリスクを測らず，唯一の確率をリスクとするモデルだからである．Roy モデルは成長業界を中心に大きく投資する傾向にある．最後に絶対偏差モデルと区分線形モデルは似た平均リスクと収益率になっている．しかし，期待収益率 1.0 %と 1.5 %の結果をみてみると，同じ平均リスクの場合は区分線形モデルの方が高い収益率をあげることができる．これは区分線形モデルがより細かくリスクを分析し，投資比率を決定するためである．そして，この 2 つのモデルは変動が少なく，急激に値下がりする可能性が他のリスク尺度よりも少ない． 2 つを比較すると平均リスクが同じという分析が表れた場合は区分線形モデルに決定する方が良いといえる．

7　おわりに

本研究では，2001 年から 2006 年の月間収益率のデータを用いて，それぞれを 3 年毎に分割し，4 パターンの投資比率を用いて分析し，2004 年から 2007 年の年間収益率でシミュレーションをおこなった．そして，1 年ごとに投資比率を変え，それぞれのリスクモデルで 4 年間の運用データを比較考察した．

結論はどのリスク尺度を用いて投資を実行しても，収益率を上げることができた．リスクを最も抑えたい場合は分散モデル，損益銘柄を少なくしたい場合はオープン L 偏差モデル，収益率をを上げ続けたい場合は Roy モデル，激しい変動を嫌う場合は区分線形モデルを選択すると良い．しかし，サブプライム問題のように市場が全体的に成長が停滞，または後退するとすべてのモデルで損失を出しているので空売りを認めなければリスク尺度を用いたポートフォリオで収益を見込むのは難しいという結果となった．

今後は，空売りを含めて最適なポートフォリオを求めたい．さらに業種ごとではなく東証第一部上場企業の実際の銘柄に当てはめ，モデルがどのような動きをするか分析することがあげられる．他にも東証第一部だけでなく，他の市場でも同じ動きをしているのか比較考察したい．

参考文献

[1] 枇々木 規雄：金融工学と最適化，朝倉書店，(2001)

[2] 今野 浩：理財工学 I，日科技連，(1995)

[3] 今野 浩：理財工学 II，日科技連，(1998)

[4] 株式投資収益率 2007 年，財団法人 日本証券経済研究所，(2008)