集合公理の基礎

2004MM026 石黒裕太郎

指導教員：宮元忠敏

1 はじめに

さまざまな公理・定理がでてくる現代数学において，確実に明らかなものが一体どのようなものなのか，おおもとの原理を全て証明し理解するのは難しいだろう．本研究において，明らかに真な原理は一体何なのかを把握していきたいと思う．

2 公理の利用

この研究において, 選択公理を含むツェルメロ・フレンケルの集合論 (以後 ZFC) を使って考えていくこととする．公理を用いることによって技術的細部まで簡潔に表すことができるからである．

3 論理の形式化

この研究において, 一階述語計算と呼ばれる人工的な形式化された言語で公理を述べていく．形式化された論理は集合論の公理を正確に表すために必要である．

4 関係

ZFC の公理より導かれる集合論的概念を考える．

まず，**関係** R とはすべての要素が順序対であるような集合 R のことである．そのうえで R の定義域と値域を以下のように定める．

（定義域）

$$\mathrm{dom}(R)=\{x:\exists y(\langle x,y\rangle\in R)\}$$

（値域）

$$\mathrm{ran}(R)=\{y:\exists x(\langle x,y\rangle\in R)\}$$

また，

$$R^{-1}=\{\langle x,y\rangle:\langle y,x\rangle\in R\}$$

と定義される．ここで $(R^{-1})^{-1}=R$ となる．

f が**関数**であるとは，f が関係であってしかも

$$\forall x\in\mathrm{dom}(f)\exists! y\in\mathrm{ran}(f)(\langle x,y\rangle\in f)$$

となることをいう．また，$f:A\to B$ は，f が関数で，$A=\mathrm{dom(f)},\mathrm{ran(f)}\subset\mathrm{B}$ となることをいう．$f:A\to B$ であるとき， $f(x)$ とは $\langle x,y\rangle\in f$ となるようなただ一つの y のことである．$C\subset A$ であるとき，$f\restriction C=f\cap(C\times B)$ とおき，これを f の C への **制限**と呼ぶ．また，このとき C の f に関する像の全体 $f''C$ の代わりに $f(C)$ を用いる場合もあるが，本研究では前者を用いる．

関数 $f:A\to B$ が 1 対 1 あるいは**単射**であるとは，f^{-1} もまた関数になることをいう．f が上への関数あるいは**全射**であるとは $\mathrm{ran}(f)=B$ となることをいう．関数 $f:A\to B$ が **全単射**であれば f が上への 1 対 1 関数である．

全順序とは，次に述べるような対 $\langle A,R\rangle$ のことである．すなわち，A は集合，R は関係である．

$$R \text{ は } A \text{ 上で推移的}:\forall x,y,z\in A(xRy\wedge yRz\to xRz)$$

であり，

$$\text{三者択一}:\forall x,y\in A(x=y\vee xRy\vee yRx)$$

が成立し，そして，

$$R \text{ は非反射的}:\forall x(\neg(xRx))$$

R は A を **全順序づける**という．ここで，$\langle x,y\rangle\in R$ のことを xRy と書く．２つの全順序 $\langle A,R\rangle,\langle B,S\rangle$ 対して，全単射 $f:A\to B$ が存在して, しかも, $\forall x,y\in A(xRy\leftrightarrow f(x)Sf(y))$ となっている．このとき f を $\langle A,R\rangle$ から $\langle B,S\rangle$ への**同型写像**といい，$\langle A,R\rangle\cong\langle B,S\rangle$ と表す．関係 R が集合 A を**整列順序づけする**，あるいは $\langle A,R\rangle$ が **整列順序** であるとは，まず，$\langle A,R\rangle$ が全順序であり，しかも A の空でない任意の部分集合に必ず $R-$ 最小の要素が存在することを意味する．

この整列順序の概念をもちいることによって、選択公理をいい表すことができる．これらの定義は [1] による．選択公理を以下に示す．

$$\forall A\exists R(R \text{ は } A \text{ を整列順序づける})$$

選択公理には同値な別表現がある．ここでは整列順序の概念を用いる．選択公理は解析学，代数学においても応用がある．たとえば，あらゆるベクトル空間が基底をもつこと，可換環において，自分自身とは異なるあらゆるイデアルが極大イデアルに拡張できる [すなわち，そのイデアルを含む極大イデアルが存在する] ことを示すときに使われる．この例は [3] による．

5 順序数

5.1 順序数の定義

集合 x が**推移的**であるとは， x の要素が同時に x の部分集合であるということである．集合 x が推移的であってしかも $\in$ によって整列順序づけされるとき， x を**順序数**という．

これらの定義をもちいて順序数の定理を証明する。これらの定理は [1] による。

5.2 順序数の定理

(1) x が順序数で $y\in x$ ならば， y も順序数で $y=\mathrm{pred}(x,y)$ ．

(2) x と y が順序数で $x\cong y$ であるならば $x=y$ である．

(3) x と y が順序数なら $x \in y, y \in x, y = x$ のどれか１つだけが成立する.

(4) x と y と z が順序数で $x \in y, y \in z$ であるならば, $x \in z$ である.

(5) C が順序数の空でない集合であれば, $\exists x \in C \forall y \in C(x \in y \vee x = y)$.

この定理は次のようなことを導く．仮に順序数の全体の集合が存在するとしたらそれ自身が順序数になるはずである．したがって，そのようなものは存在しないと考えられる．ここでブラリフォルティのパラドックスを考える．

5.3　ブラリフォルティのパラドックス

$$\neg \exists z \forall x (x \text{ は順序数} \to x \in z).$$

[証明]

(背理法) 順序数全体 ON は順序数となる．なぜならば，順序数の定理より ON は推移的であり，$\in$ によって整列順序づけられる。しかし、これは $ON \in ON$ となり，全順序であるという事実に反する．[証明終わり]

これはブラリフォリティのパラドックスとよばれ，ある属性を有する要素全体の集合を作ろうとする際には注意しなければならない．これは [1] による．

このようなパラドックスは**クラスパラドックス**とよばれ，１９世紀における無限小解析の明確化，厳密化の流れに対する確信をくじく危機をもたらした．主要なクラスパラドックスはここであげたブラリフォルティのパラドックスの他に，カントルのパラドックス，ラッセルのパラドックスがある．クラスパラドックスの説明は [2] による．

5.4　順序型の定義

(1) 整列順序 $\langle A, R\rangle$ の**順序型** $type(A,R)$ とは $\langle A, R\rangle \cong C$ をみたすただ一つの順序数 C のことである．

(2) 順序数の集合 X に対して $sup(X) = \cup X$ とおく．また，$X \neq \emptyset$ のときには $min(X) = \cap X$ とおく．

ほとんどの場合有限集合の中身を数えるために自然数をつかっているが,

選択公理を仮定すると任意の集合の要素を順序数をつかってかぞえることができるようになる,

これらの定義は [1] による．

6　順序数と自然数

6.1　順序数の種類

集合論において順序数は重要な役割をもつ．自然数の通常の算術計算の多くが順序数全体に対して定義できる．以下を定義する．

$$S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}.$$

ここで，$\exists \beta (\alpha = S(\beta))$ となるような順序数 α を**後続型順序数**という．0 でも後続型順序数でもない順序数を**極限順序数**という．$1 = S(0), 2 = S(1), 3 = S(2), 4 = S(3), \cdots$. と定義する．

これにより 0 は空集合，$1 = \{0\}, 2 = \{0,1\}, 3 = \{0,1,2\}, 4 = \{0,1,2,3\}$ などとなる．

6.2　自然数全体の集合

$\forall \beta \leq \alpha (\beta = 0 \vee \beta \text{は後続型順序数})$ となるような順序数 α のことを**自然数**という．この定義より，自然数全体は順序数全体の一つの切片となる．直感的には自然数は 0 に S を有限回適用して得られる順序数である．今、自然数全体の集合を考えられない．そこで無限公理をもちいて考えていく．これらの定義は [1] による．

以下に無限公理を示す．

$$\exists x (0 \in x \wedge \forall y \in x (S(y) \in x)).$$

これによって自然数が集合となる．

$$\text{自然数全体} \omega = \{ z \in x \mid z \text{ は自然数である } \}$$

ここで x は無限公理で存在を仮定した集合である．このとき，$\forall z (z \in \omega \leftrightarrow z \text{ は自然数である})$ が成立する．

6.3　ペアノの公準

ω の要素は次に述べるペアノの公準をみたす．

$$0 \in \omega. \tag{1}$$

$$\forall n \in \omega (S(n) \in \omega). \tag{2}$$

$$\forall n, m \in \omega (n \neq m \to S(n) \neq S(m)). \tag{3}$$

$$\forall X \subset \omega [(0 \in X \wedge \forall n \in X (S(n) \in X)) \to X = \omega]. \tag{4}$$

ここで示した (4) は**数学的帰納法**である．ω の要素が本物の自然数か否かよりも，ω の要素がペアノの公準をみたすという点が重要となる．

7　おわりに

本研究では『関係』,『全順序』,『順序数』を定義した．次にそれらをもとに自然数を定めていった．本研究でやれたことはわずかだが，真偽を決するための土台がいかに多いものかがわかり, 何より『確かさ』,『無限』への関心が深まったことに本研究の意義を感じる．

参考文献

[1] ケネス·キューネン (藤田 博司 訳):『集合論 独立性証明の案内』．日本評論社，日本，2008．(ケネス・キューネン ：*Set theory An introduction to independence Proofs*. Kenneth Kunen)

[2] マーカス・ジャキント (田中 一之 監訳) ：『数学の基礎についての哲学論考 確かさを求めて』．培風館，東京，2007．(マーカス・ジャキント ：*The Search for Certainty A Philosophisical Account df Founations of Mathematics*. Marcus Giaquinto)

[3] ヴィクター J・カッツ（上野健爾，三浦伸夫 監訳）：『カッツ 数学の歴史』．共立出版株式会社，東京，2005．(ヴィクター J・カッツ ：*A HISTORY OF MATHEMATICS:AN INTRODUCTION*.