関数解析

2003MM045 川口　純平
指導教員：宮元　忠敏

1　はじめに

関数解析とは関数の集合の成す空間の解析を行なう分野であり，関数の集合を線形代数的に扱う無限次元の線形代数のようなものである。フーリエ変換やヒルベルトの積分方程式などの研究に端を発している。特定の関数からなるベクトル空間にある種の位相構造を定めた関数空間などが研究される分野である

2　連続関数の空間

R^p の点 $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots\cdots \xi_p)$ に対して、$\|x\| = \max|\xi_i|(1 \leqq i \leqq p)$ とおくと、これは

$$(N1) \qquad \|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \tag{1}$$

$$(N2) \qquad \|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| \tag{2}$$

$$(N3) \qquad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \tag{3}$$

を満たすことがわかる。

一般に、ベクトル空間 X の各要素 x に、上の (N1)、(N2)、(N3) を満たすようなノルム $\|x\|$ が対応しているとき、X をノルム空間という。

3　超関数

3.1　線形汎関数、弱収束

一般にノルム空間 X 上で定義され、数の値をとる関数 F が、$f \in X$ に対し、

$$F(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 F(f_1) + \alpha_2 F(f_2) \tag{4}$$

$$|F(f)| \leq M\|f\| \tag{5}$$

を満たす時、F は X 上の有界線形作用素という。
ところで、線形汎関数の領域である複素数 C または実数 R はバナッハ空間と考えることができるから、線形作用素に関する結果がそのまま使える。たとえば F について
有界性　$\Leftrightarrow$　連続性

この時上式の成り立つような M の下限を F のノルムといい、$\|F\|$ で表すと、$|F(f)| \leq \|F\|\|f\|$ となるが、さらに次の関係が成立する。

$$\|F\| = \sup_{\|f\|=1} |F(f)| = \sup_{f \neq 0} \frac{|F(f)|}{\|f\|}. \tag{6}$$

また、X 上の線形汎関数の集合を X^* で表すと、これは $B(X, C)$ などに相当するから、$F, G \in X^*$ に和 $F+G$ やスカラー倍 αF が定義される。

4　ベールのカテゴリー定理

4.1　定理 (参考文献 [1])

バナッハ空間 X が可算個の閉集合 M_n により、

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \tag{7}$$

と表せるならば、少なくとも一つの M_n は空でない開集合を含む

5　一様有界性の定理

線形汎関数の弱収束に関連してでてきたバナッハ・シュタインハウスの定理は次の形に述べられる。

5.1　定理 (参考文献 [1])

バナッハ空間 X 上の線形汎関数の列 $\{f_n\}$ が f に弱収束するならば、$\{\|f_n\|\}$ は有界である、

ところで、$f_n \to f$(弱) ならば、各 $x \in X$ に対し、$f_n(x) \to f(x)$、よって、

$$\sup_n |f_n(x)| = M_x < \infty \tag{8}$$

となる、ここに M_x は各 x ごとに異なるから $\sup_{\|x\|\leq 1} M_x = \infty$ かもしれない。しかし、バナッハ・シュタインハウスの定理は、$\sup\|f_n\| = M < \infty$、よって、

$$\sup_{\|x\|\leq 1} |f_n(x)| \leq \sup_{\|x\|\leq 1} \|f_n\|\|x\| \leq M \tag{9}$$

すなわち、$\|x\| \leq 1$ につき、一様に有界となること主張するものである、ここでは次の形に拡張したものを証明しておこう。これを一様有界性の定理と呼ぶ理由と呼ぶ理由は上に述べたことで明らかであろう

5.2　定理 (参考文献 [1])

バナッハ空間 X からバナッハ空間 Y への有界線形作用素の列 $\{T_n\} \subset B(X, Y)$ が、各点 x ごとに有界：

$$\sup_n \|T_n x\| = M_x < \infty. \tag{10}$$

ならば、$\{\|T_n\|\}$ は有界になる、すなわち、$\sup_n \|T_n\| = M < \infty$。

5.3　証明

$M_k^{(n)} = \{x : \|T_n x\| \leq \frac{k}{2}\}$ とおくと、$M_k^{(n)}$ は閉集合、ゆえに、

$$M_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_k^{(n)} = \{x : \sup_n \|T_n x\| \leq \frac{k}{2}\} \tag{11}$$

も閉集合となり、仮定の $\sup_n \|T_n x\| = M_x < \infty$ より $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$ となる。したがって、ベールの定理より、ある M_k は球 $S(x_0; r)$ を含む。これは、M_k の取り方から、

$$\|x\| < r \Rightarrow \sup_n \|T_n(x_0 + x)\| \leq \frac{k}{2} \tag{12}$$

ところで、

$$\|T_n x\| \leq \|T_n(x_0 + x) - T_n x_0\| \leq \|T_n(x_0 + x)\| + \|T_n x_0\| \tag{13}$$

だから、$\|x\| < r \Rightarrow \sup_n \|T_n x\| \leq k$ が言えた。よって $\sup_n \|T_n\| \leq \frac{k}{r}$ となる。

6　バナッハ・シュタインハウスの定理

バナッハ空間 X からバナッハ空間 Y への有界作用素の列$\{T_n\} \subset B(X, Y)$ が、各点に対し、

$$Tx = \lim_{n \to \infty} T_n x \tag{14}$$

が存在すると、$\{||T_n||\}$は有界で、T は X 上の有界線形作用素となる。

7　ベールのカテゴリー定理の応用

(参考文献 [2]) 至るところ微分不可能な連続関数の存在を示す

7.1　定理

区間 $[0, 1]$ 上のどの点でも微分出来ない連続関数が存在する

7.2　証明

$X = C[0, 1]$ とおく、さらに適当に t をとり、

$$\sup_h |\frac{f(t+h) - f(t)}{h}| \leq n \quad (-t \leq h \leq 1 - t,\ \ h \neq 0) \tag{15}$$

が成立するような $f \in X$ の全体を X_n とおく、このとき各 n に対して、$\overline{X_n}$ は開集合を含まないことを示せば、ベールのカテゴリー定理より

$$X \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{X_n} \quad \text{よって}\ X - \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \neq \phi \tag{16}$$

$f \in X - \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ をとると、すべての n に対して、$f \notin X_n$ よって $0 \leq t \leq 1$ なる任意の t に対して適当に h をとると

$$|\frac{f(t+h) - f(t)}{h}| > n \tag{17}$$

そして t を固定すると、$f(t+h)$、$f(t)$ は有界であるから、上の式より $n \to \infty$ の時 $h \to 0$ とならざるを得ない従って

$$\lim_{h \to 0} |\frac{f(t+h) - f(t)}{h}| \not< \infty \tag{18}$$

これはどの $t \in [0, 1]$ においても微分不可を示す.

次に、$\overline{X_n}$ が空でない開集合 $(\neq \phi)$ を含まないことを示す、まず X_n は空でない開集合を含まないことを示す、そのために、まず、X_n が閉集合であることをいう。$f_k \in X_n$、$f_k \to f$　、まず $f \in X_n$ を示す、$f_k \in X_n$ より、$t_k \in [0, 1]$、

$$|\frac{f_k(t_k + h) - f_k(t_k)}{h}| \leq n \quad (-t_k \leq h \leq 1 - t_k,\ \ h \neq 0) \tag{19}$$

$[0, 1]$ が完備なので、$\{t_k\}$ は収束する部分列を持つ。で、$t_0 = \lim_{k \to \infty} t_k$ とおくと

$$|\frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}| \leq n \tag{20}$$

ゆえに、$f \in X_n$. X_n は閉集合である、

$x \in X_n$ と $\varepsilon > 0$ を勝手にとる。$[0, 1]$ を 2^N 等分し、その分点を、$t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \cdots\cdots < t_{2^N - 1} < t_{2^N} = 1$ とする、すなわち、$t_k = \frac{k}{2^N}$。各点 $(t_k, x(t_k))$ を線分でつないで区分的に線形な曲線 $x_N = x_N(t)$ をつくる。

$$x_N = x(t_k) + 2^N(x(t_{k+1}) - x(t_k))(t - t_k) \quad (t_k \leq t \leq t_{k+1}).$$

$x(t)$ は $[0, 1]$ 上一様連続であるから、N を十分大きくとれば

$$\|x - x_N\| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{22}$$

とできる。さらに、その部分空間 $[t_k, t_{k+1}]$ を $2m$ 等分し、その分点を $t_{k,j}$ $(j = 0, 1, 2, \cdots\cdots, 2m)$ とおく。

さらに、点 $(t_k, x_N(t_k) \pm \frac{\varepsilon}{2})$ と $(t_{k+1}, x_N(t_{k+1}) \pm \frac{\varepsilon}{2})$ を結ぶ直線をそれぞれ、l^+ と l^- とする。

で、さらに直線 $t = t_{k,2j}$ と l_- との交点を P_j、直線 $t = t_{k,2j+1}$ と l_+ との交点を Q_j とする、P_j と Q_j、Q_j と P_{j+1} を線分で結ぶ。こうして折れ線をつくる。

これを各 k について構成すると $[0, 1]$ 上で定義された折れ線を得る。これを、$x_{N,m}(t)$ で表す。

各線分の勾配は $t \in [t_k, t_{k+1}]$ の時

$$2^N(x(t_{k+1}) - x(t_k)) \pm 2^{N+1}\varepsilon m \tag{23}$$

そして $\|x_N - x_{N,m}\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$、よって (21) から

$$\|x - x_{N,m}\| \leq \|x - x_N\| + \|x_N - x_{N,m}\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \tag{24}$$

となる。m を大きくとれば、$x_{N,m} \notin X_n$. よって、X_n のどんな近傍にも x に属さない点が存在していることを示している。よって $\overline{X_n} = X_n$ は開集合を含まない。

8　おわりに

今回の卒業論文にあたって、予定では、完全連続作用素から与えられる応用の方に研究を進めて行きたかったが、難度が高く、途中から、線形汎関数から展開される超関数の分野に方向転換していった。

結果、ベールのカテゴリー定理を用い、ある区間で連続だが、微分可能でない関数の存在を証明できた。

参考文献

[1] 洲之内　治男:『関数解析入門』. サイエンス社，東京，1975.

[2] 増田　久弥:『数学シリーズ　関数解析』. 裳華房，東京，1994.