整数の性質

2003MM009 藤岡裕也
指導教員：佐々木克巳

1 はじめに

本研究は、一松 [1] をもとに、数学を学ぶことにおいて様々な数の組み合わせの中に見え隠れする性質を理解し、整数に対して問を解くということだけに捉われず、違った捉え方や問への新たなアプローチを目的とする。

2 整数論の基本定理

整数論の基本定理は、以下の補助定理 1.1、補助定理 1.2 を用いて導かれる。本研究では、この証明を理解した。

整数の基本定理:任意の正の整数は、その因数の順序を問わなければただ一通りに因数分解できる。

補助定理 1.1:素数 p が積 $a \cdot b$ を割り切るなら、a か b か少なくとも一方が p で割り切れる。

補助定理 1.2:素数 p が他の素数 q を割り切れば、$p = q$ である。

3 ２乗して１足した数の性質

$x^2 + 1$ の素因数分解に関して、以下に性質１から性質３を表す。

性質１:x が奇数のとき、$x^2 + 1$ は 2 で割り切れるが、4 では割り切れない。

性質２:x の一の位が 2,3,7,8 であるとき $x^2 + 1$ は 5 で割り切れる。

性質３:x^2+1 の素因数のうち、2 以外の素因数は、5,13,17, …といった 4 で割ると 1 余る数ばかりである。

性質 1 と性質 2 の証明は [1] では述べられていないが、本研究では、その証明を補って理解した。性質 3 は [1] で、補助定理 2.1、補助定理 2.2(フェルマーの小定理) を用いて証明されている。本研究では、この補助定理 2.2 の証明に少し手を加え、自分なりの理解を深めた。

補助定理 2.1:p を素数とすると、$(a + b)^p - a^p - b^p$ は p で割り切れる。

補助定理 2.2(フェルマーの小定理):p が素数、n が p の倍数でないとすると、n^{p-1} を p で割った乗除は 1 である。

4 最大公約数

最大公約数を求める方法である、互減法、互除法について述べる。互除法についてはラメの定理により、最大何回の除算で最大公約数が出るか考察する。

4.1 互減法

[1] で述べられている互減法の操作をより詳しく述べる。具体的には、次の 1 から 4 にあげる。

１:2 数を並べて記す。この 2 数を m,n とする。
２:もし $m = n$ ならば、それが最大公約数である。
３:$m > n$ ならばはじめの 2 数を $m - n$,n とおき換え、$m < n$ ならばはじめの 2 数を m,$n - m$ とおき換える。
４:2 にもどって繰り返す。

互減法の操作で最大公約数を求まることは、d が m と n の公約数であることと、d が $m-n$ と n の公約数であるということが同値であることを使い、示すことができる。

4.2 互除法

m から n を引けるだけ引いて余りが n より小さくなるところまで反復するという操作は、m を n で割って整数の商と余りを出す操作と等しいことから、次の互除法の操作である 1 から 3 のように書き換えることができる。

１:2 数を並べて記す。この 2 数を m,n とする。
２:m を n でわって余り r を求める。
３:$r = 0$ ならばそのときの除数 n が最大公約数である。もしそうでないならば、m を n で n を r でおき換えて 2 にもどる。

上の互除法で最大公約数を求めた例をあげる。

例:10001 と 1022 の最大公約数

$10001 \div 1022 = 9$	余り 803
$1022 \div 803 = 1$	余り 219
$803 \div 219 = 3$	余り 146
$219 \div 146 = 1$	余り 73
$146 \div 73 = 2$	余り 0

したがって 73 が最大公約数である。

4.3 ラメの定理

互除法を用いた場合、何回の操作で最大公約数が求まるかを知るためにラメの定理を示す。

ラメの定理:互除法を用いて $m, n(m \geq n)$ の最大公約数を求めると、遅い場合でも n の 5 倍の除算で答えが出る。

この定理は、フィボナッチ数列との関連性から次のように証明される。

a と b について、$a \div b$ の商 q を、 余り r とすると、r は除数 b より小さい正の数である。互除法における各除算を繰り返すと余り r は小さくなるため、いつかは 0 になって完了する。その減りが最も遅いのは余りが 0 なるときを除き、商が常に 1 になる場合である。このとき商が 1 のときの非除数の列が、$f_1 = 1$,$f_2 = 1$ から始まって次に出て来る数は直前の 2 数の和として、得られるフィボナッチ数列 $(f_{n+2} = f_{n+1} + f_n)$ の第 3 項以降と同じである。ここで次の補助定理 4.1 を示す。

補助定理 4.1:$f_{n+5} \geq 10f_n$

証明

$$f_7 = 13 > 10f_2 \qquad f_8 = 21 > 10f_3$$

である。$f_{n+5} \geq 10f_n$,$f_{n+6} \geq 10f_{n+1}$ と仮定すると

$$
\begin{aligned}
f_{n+7} &= f_{n+6} + f_{n+5} \\
&\geq 10f_{n+1} + 10f_n \\
&= 10(f_{n+1} + f_n) \\
&= 10f_{n+2}
\end{aligned}
$$

となる。

このことを考えれば、商が常に 1 という最大に互除法の操作を繰り返すの場合であったとしても、フィボナッチ数列は 5 個進むと 10 倍以上に増えるといえるので、これによりラメの定理を示すことができる。本研究では、補助定理 4.1 の証明を補い、ラメの定理とフィボナッチ数列との関係を理解した。

5　繰り返す小数

ある定まった数字の列が繰り返し現れる小数を循環小数という。また繰り返し現れる数字のパターンを循環節という。通例、循環節を最初と最後の数字の上に・をつけて以下のように表現する。

$$2 \div 3 = 0.\dot{6}$$
$$5 \div 6 = 0.8\dot{3}$$
$$1 \div 13 = 0.\dot{0}7692\dot{3}$$
$$1 \div 7 = 0.\dot{1}4285\dot{7}$$

ここで $0.\dot{6}$,$0.\dot{1}4285\dot{7}$ のように小数の最初の位から循環節が始まるものを、純循環小節とよび、$0.8\dot{3}$ のように最初に循環節とは関係ない数字があって、途中から循環節が始まるものを混循環小数という。

ここでは有理数が循環小数で表現できることと、循環小数で表現できる数は有理数であることについて述べる。

有理数は循環小数で表現できる:4 つの有理数 $1 \div 7$,$1 \div 13$,$1 \div 17$,$1 \div 31$ について、循環節の列に注目し応用することで、簡潔に整理し、循環小数で表現できる。以下に $1 \div 7$ の詳細を述べる。

$1 \div 7 = 0.\dot{1}4285\dot{7}$ である。この場合には小数第 1 位から第 6 位までの 6 回の除算で余りに 1 から 6 のすべての数が現れる。その後は同じ余りに関する計算なので、同一の計算の反復になり、商は同じ数字列 142857 が繰り返す循環小数で表せる。なので、$2 \div 7, 3 \div 7, 4 \div 7$ の計算は小数第一位を求めその数から循環節が始まると考えることができる。以下にそれを記す。

$$2 \div 7 = 0.\dot{2}8571\dot{4}$$
$$3 \div 7 = 0.\dot{4}2857\dot{1}$$
$$4 \div 7 = 0.\dot{5}7142\dot{8}$$

このように $1 \div 7$ に関連する計算も容易に求められる。

循環小数で表現できる数は有理数である:純循環小数 $0.\dot{a_1}a_2 \ldots \dot{a_n}$ を考える。一般的に純循環小数 $0.\dot{a_1}a_2 \ldots \dot{a_n}$ は、$\dfrac{a_1a_2 \ldots a_n}{99 \ldots 9}$ で表すことができることを以下に示す。数字列 $a_1a_2 \ldots a_n$ の値を A と表し、純循環小数 $0.\dot{a_1}a_2 \ldots \dot{a_n}$ を x とおくと、

$$x = \frac{A}{10^n} + \frac{x}{10^n}$$

となる。これを変形していくと、

$$x - \frac{x}{10^n} = \frac{A}{10^n}$$
$$\frac{(10^n - 1)x}{10^n} = \frac{A}{10^n}$$
$$x = \frac{A}{10^n - 1}$$

となる。ゆえに $x = \dfrac{a_1a_2 \ldots a_n}{99 \ldots 9}$ である。

混循環小数について考える。混循環小数は、最初の循環しない部分を 10 の累乗を分母とする分数で表し、循環節を上記の純循環小数の形にして、両者を加えた分数で表現できる。以下に例をあげる。

例

$$0.8\dot{3} = \frac{8}{10} + \frac{3}{90} = \frac{24+1}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$$
$$0.58\dot{3} = \frac{58}{100} + \frac{3}{900} = \frac{174+1}{300} = \frac{175}{300} = \frac{7}{12}$$

本研究では、[1] で述べられていない純循環小数 $0.\dot{a_1}a_2 \ldots \dot{a_n} = \dfrac{a_1a_2 \ldots a_n}{99 \ldots 9}$ の証明を補い、循環小数について理解を深めた。

6　アイゼンスタイン三角形

3 辺の長さが a,b,c で一つの角が 120 °であり、$a^2 + ab + b^2 = c^2$ を満足する三角形をアイゼンスタイン三角形と呼ぶ。以下に a,b,c が互いに素であるときのアイゼンスタイン三角形の性質をあげる。

性質 1:c は奇数である。

性質 2:a,b はともに奇数か、または一方が偶数、他方が奇数である。また a と b との差は 3 の倍数でない。

性質 3:a,b が共に奇数であれば、$a + b$ は 8 の倍数である。

性質 4:a,b,c は、一方が偶数で他方が奇数である正の整数 $m, n (m > n)$ の 2 次式によって、以下のように表すことができる。

$$a = m^2 - n^2$$
$$b = n(2m + n)$$
$$c = m^2 + mn + n^2$$
$$a + b = m(m + 2n)$$

本研究では、性質 1 から性質 4 の証明を [1] にそって理解した。

7　おわりに

本研究を行うにあたって、整数問題を様々な捉え方で研究し、過去に考え付かなかったような問へのアプローチや、少ないが整数問題の規則性を理解できた。今後も問への取り組み方を一つと決めず、多くの関連性を考えた上で取り組んでいきたい。

参考文献

[1] 一松信：『整数と遊ぼう』. 日本評論社，東京，2006.