# 微分幾何学
## —曲線論・曲面論および微分可能多様体の幾何学—

2004MM093 山下裕也
指導教員: 宮元忠敏

## 1 はじめに

本研究では，参考文献[1]，[2]を用いて，微分可能曲線・微分可能曲面・微分可能多様体に関しての数学的特徴の理解を深めていくことを目的としている．

## 2 微分可能曲線

この章では，三次元の微分可能曲線に関しての数学的特徴を述べていく．

### 2.1 微分可能曲線の定義

区間$I$から$\mathbb{R}^3$への連続写像$c: I \to \mathbb{R}^3$において

$$\mathbf{x}(t) = \overrightarrow{oc(t)} \quad t \in I$$

で定まる$\mathbf{x}(t)$が$I$上無限回連続微分可能であるとき，$c$を三次元の**微分可能曲線**と呼ぶ．ただし，$o$は原点であるとする．

### 2.2 曲率及び捩率の定義

$s$を弧長パラメータとし，$\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)$をそれぞれ

$$\mathbf{t}(s) = \frac{d\mathbf{x}}{ds}(s), \quad \mathbf{n}(s) = \frac{\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}(s)}{\left|\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}(s)\right|}, \quad \mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$$

と定めておく．このとき，正規直交基$\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$をFrenet枠と呼び，曲率$\kappa(s)$及び捩率$\tau(s)$が

$$\kappa(s) = \left|\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}(s)\right|, \quad \tau(s) = \left\langle \frac{d\mathbf{n}}{ds}(s), \mathbf{b}(s) \right\rangle \quad s \in I$$

によって定義される．これらは，三次元の微分可能曲線が必ず持つ性質である．

### 2.3 Frenet-Serretの公式

**定理**(Frenet-Serretの公式)

$\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$を正則曲線$c$のFrenet枠とする．このとき

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{t}}{ds}(s) = & & \kappa(s)\mathbf{n}(s) & \\ \dfrac{d\mathbf{n}}{ds}(s) = & -\kappa(s)\mathbf{t}(s) & & +\tau(s)\mathbf{b}(s) \\ \dfrac{d\mathbf{b}}{ds}(s) = & & -\tau(s)\mathbf{n}(s) & \end{cases}$$

が成り立つ．

この公式により，曲率及び捩率を与えれば，三次元の微分可能曲線を一意的に求めることが出来る．

## 3 微分可能曲面

ここでは，三次元の微分可能曲面に関する数学的特徴を述べていく．

### 3.1 微分可能曲面の定義

$\sum(o, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$を$\mathbb{R}^3$における右手系の直交座標系とする．平面$\mathbb{R}^2$の開領域$D$から$\mathbb{R}^3$への写像を$\varphi$とし

$$M = \left\{ \varphi(u^1, u^2) \mid (u^1, u^2) \in D \right\}$$

とする．原点$o$に関する点$\varphi(u^1, u^2) \in M$の位置ベクトルを$\mathbf{x}(u^1, u^2)$，座標を$(\rho^1(u^1, u^2), \rho^2(u^1, u^2), \rho^3(u^1, u^2))$と書く．このとき

1. $\mathbf{x}(u^1, u^2)$が$D$上無限回連続偏微分可能
2. $D$上

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\rho^1}{\partial u^1} & \dfrac{\partial\rho^1}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial\rho^2}{\partial u^1} & \dfrac{\partial\rho^2}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial\rho^3}{\partial u^1} & \dfrac{\partial\rho^3}{\partial u^2} \end{pmatrix} = 2$$

ならば，$M$を$\mathbb{R}^3$内の**微分可能曲面**と呼び，$(u^1, u^2) \in D$を曲面$M$の**パラメータ**と呼ぶ．この定義より，

$$M_p = \left\{ \sum_{i=1}^{2} \xi^i \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i}(u_0^1, u_0^2) \mid \xi^i \in \mathbb{R} \right\} \quad ただし, p = \varphi(u_0^1, u_0^2)$$

は二次元の実線形空間をなす．この$M_p$を点$p \in M$における$M$の**接平面**と呼ぶ．また，$v \in M_p$を点$p$における**接ベクトル**と呼び，$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1}(u^1, u^2) \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2}(u^1, u^2)$と同じ向きを持つ単位ベクトル$\mathbf{n}(u^1, u^2)$を**単位法ベクトル**と呼ぶ．

### 3.2 第一基本形式と第二基本形式

$M$を$\mathbb{R}^3$内の微分可能曲面とし，$(u^1, u^2) \in D$をそのパラメータとする．$D$上の微分可能関数$g_{ij}, h_{ij}$をそれぞれ

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^j} \right\rangle, \quad h_{ij} = \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^i \partial u^j}, \mathbf{n} \right\rangle$$

で定める．このとき，$v, w \in M_p$の基$\left\{ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i}(u_0^1, u_0^2) \right\}$に関する成分を$\xi^i, \eta^j$とし

$$g_p(v, w) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} g_{ij}(u_0^1, u_0^2) \xi^i \eta^j$$

$$h_p(v, w) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} h_{ij}(u_0^1, u_0^2) \xi^i \eta^j$$

と定めたとき，$g_p$を**第一基本形式**と呼び，$h_p$を**第二基本形式**と呼ぶ．

### 3.3 誘導方程式

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ j\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{2} g^{ia} \left( \frac{\partial g_{ja}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{ak}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^a} \right)$$

を**Christoffelの記号**と呼ぶ．ただし，$g^{ij}$は$g_{ij}$を$(i,j)$要素とする行列における逆行列の$(i,j)$要素である．このとき，以下の二つの誘導方程式が成り立つ．

(a) Gaussの誘導方程式

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^j \partial u^k} = \sum_{i=1}^{2} \left\{ \begin{matrix} i \\ j\ k \end{matrix} \right\} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i} + h_{jk}\mathbf{n} \quad j,k = 1,2$$

(b) Weingartenの誘導方程式

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^j} = -\sum_{i=1}^{2} h^i_j \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i} \quad j = 1,2$$

ただし，$h^i_j = \sum_{a=1}^{2} h_{ja} g^{ai}$とする．これらの誘導方程式より，$g_{ij}, h_{ij}$を与えれば，微分可能曲面を一意的に求めることが出来る．

## 4　微分可能多様体

この章では，２次元の微分可能多様体に関しての数学的特徴を述べていく．

### 4.1　二次元アトラスの定義

$M$をHausdorff空間とする．$U_\alpha$を$M$の開集合，$\varphi_\alpha$を$U_\alpha$から$\mathbb{R}^2$の開集合への位相写像とし，組$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$の族を$\Phi = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$とする．このとき

(i) $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$は$M$の開被覆

(ii) $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta) \in \Phi$のとき，写像

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha (U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta (U_\alpha \cap U_\beta)$$
$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta (U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha (U_\alpha \cap U_\beta)$$

がともに微分可能

の二つの条件を満たすとき，$\Phi$を$M$の**二次元微分可能アトラス**と呼ぶ．そして，$\Phi_0 \subset \Phi$である$M$の任意のアトラス$\Phi$に対して$\Phi_0 = \Phi$が成り立つとき，$M$のアトラス$\Phi_0$は**極大**であると呼ぶ．

### 4.2　微分可能多様体の定義及び定理

$\Phi_0$が$M$の極大な二次元微分可能アトラスであるとき，組$(M, \Phi_0)$を**二次元微分可能多様体**と呼び，$\Phi_0$をその**微分可能構造**と呼ぶ．$p \in U$のとき，$(U, \varphi) \in \Phi_0$を点$p$における**（局所）座標系**，$U$を$p$の**座標近傍**と呼ぶ．

**定理**

$f$を$\mathbb{R}^3$上の微分可能関数とする．
$M = \{(\rho^1, \rho^2, \rho^3) \mid f(\rho^1, \rho^2, \rho^3) = 0\}$のとき，$M$上

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \rho^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \rho^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \rho^3}\right)^2 \neq 0$$

ならば，$M$は二次元微分可能多様体となる．

### 4.3　接ベクトル

各$p \in M$に対して

$$C^\infty(p) = \{f \mid f\text{は点}p\text{における微分可能関数}\}$$

と定める．

$v : C^\infty(p) \to \mathbb{R}$を写像とする．任意の$f, g \in C^\infty(p)$に対して

(i) $v(\alpha f + \beta g) = \alpha v(f) + \beta v(g)$　ただし，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(ii) $v(fg) = f(p)v(g) + v(f)g(p)$

が成り立つとき，写像$v$を点$p$における$M$の**接ベクトル**と呼ぶ．この接ベクトルの定義により次の定理が成り立つ．

**定理**

$p \in M$とし，$M_p = \{v \mid v\text{は点}p\text{における接ベクトル}\}$とすれば，$\alpha \in \mathbb{R}$，$v, w \in M_p$のとき，$M_p$は演算

$$(v+w)(f) = v(f) + w(f), \quad (\alpha v)(f) = \alpha v(f)$$

について実線形空間をなす．

この定理における実線形空間$M_p$を点$p \in M$における**接空間**と呼ぶ．

### 4.4　座標系の変換

$(U, \varphi)$を点$p$における座標系とし，$\mathbb{R}^2$の各点の座標を$(u^1, u^2)$とする．$U$上の関数$x^1, x^2$を

$$x^i = u^i \circ \varphi \quad i = 1,2$$

で定めれば，$x^i \circ \varphi^{-1} = u^i$から，各$x^i$は$U$上の微分可能関数である．この関数$x^1, x^2$を$U$上の**座標関数**と呼び，座標系$(U, \varphi)$を座標系$(x^1, x^2, U)$と書き表すことができる．

このとき，$U$上の実数値関数$f$は座標関数$x^1, x^2$の関数であり，$f$は$x^1, x^2$について微分可能となる．そこで

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i}(\varphi(p)), \quad \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p (f) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

と定める．このとき，$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p \in M_p$ となる．

**定理**

$(x^1, x^2, U)$を点$p \in M$における座標系とする．このとき

(1) $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_p \right\}$は接空間$M_p$の基で，

(2) $v = \sum_{i=1}^{2} v(x^i) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p \quad v \in M_p$

となる．

### 4.5　接ベクトル場

$G$を$M$の開集合とする．各$p \in G$に接ベクトル$X_p \in M_p$を対応させる対応$X$を$G$上の**接ベクトル場**と呼ぶ．また，関数$f$が$U$上微分可能なとき，$U$上の実数値関数$Xf$を

$$(Xf)(q) = X_q f \quad q \in U$$

で定める．もし，各$p \in G$および座標系$(x^1, x^2, U)$に対し，$U \subset G$で$Xf \in C^\infty(p)$ならば$G$上の接ベクトル場$X$は微分可能であると定義する．

## 5　おわりに

本研究では，微分可能多様体に関してアフィン接続，リーマン多様体まで辿り着かなかったが，微分可能曲線と微分可能曲面に関しては特徴を掴むことが出来た．

## 参考文献

[1] 初瀬弘平：微分幾何学講義, 共立出版 (1993).

[2] 塩濱勝博・成慶明:曲面の微分幾何, 日本評論社　(2006)