最適レギュレータによる倒立振子の安定化制御
―評価関数の重みに関する考察―

2004MM091 山口将吾
指導教員: 高見勲

1　はじめに

本論文では倒立振子ペンダボット実験装置を制御対象にし，制御手法は最適レギュレータを用い，評価関数の重みが過渡特性に与える影響について論ず.

2　モデリング

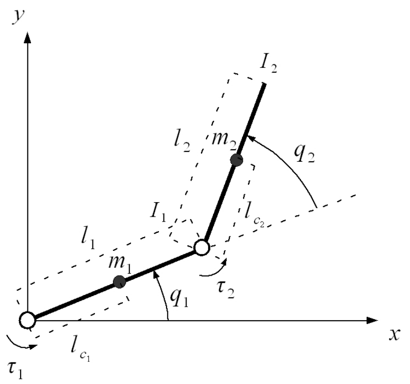

図 1: ペンダボットのモデル図

ペンダボットは非線形モデルであるため，テーラー展開により，以下の近似した線形化状態方程式を得る.

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B} \tag{1}$$

$$y = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \tag{2}$$

3　拡大系モデル

目標値に定常偏差なく追従するため偏差の積分を導入し，その拡大システムを考える．出力の目標値r_0からの偏差$e(t)$を積分する変数$z(t)$を導入する.

$$z(t) = -\int_0^t e(\tau)d\tau \tag{3}$$

よって拡大システムは下式で与えられる.

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) \\ \dot{\tilde{z}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{x}}(t) \\ \tilde{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \tilde{u}(t) \tag{4}$$

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x_s}, \tilde{z}(t) = z(t) - z_s, \tilde{\boldsymbol{u}}(t) = \boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{u_s}$$

4　最適レギュレータ

フィードバックゲインを決定する方法として，最適レギュレータと呼ばれる手法がよく用いられる．システムに対して，次の評価関数を導入する.

$$\int_0^\infty \{ \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{x}}(t) \\ \tilde{z}(t) \end{bmatrix}^T \tilde{\boldsymbol{W}} \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{x}}(t) \\ \tilde{z}(t) \end{bmatrix} + R\tilde{u}(t)^2 \} dt \tag{5}$$

$$\tilde{\boldsymbol{W}} = \begin{bmatrix} w_1 \boldsymbol{C}^T \boldsymbol{C} & 0 \\ 0 & w_2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

このとき，制御入力は下式で与えられる.

$$u(t) = -\boldsymbol{K}^T \boldsymbol{x} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{K} = -R^{-1} \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{P} \tag{8}$$

ここで，$\boldsymbol{P}$はリカッチ型行列方程式

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}R^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{W} = \boldsymbol{O} \tag{9}$$

を満足する唯一の正定対称な解である．評価関数の重みは$w_1 > 0$，$w_2 > 0$，$R = 1$とする.

5　シミュレーションと実験の比較

図2，3は，目標値を変更する実験を行った際の各リンクの角度[rad]をプロットしたものである．非線形特性の考慮は成されていないが，極めて近い形で出力させることができた.

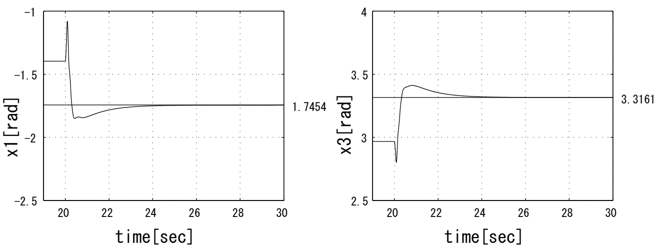

図 2: $w_1 = 3000$，$w_2 = 3000$におけるシミュレーション

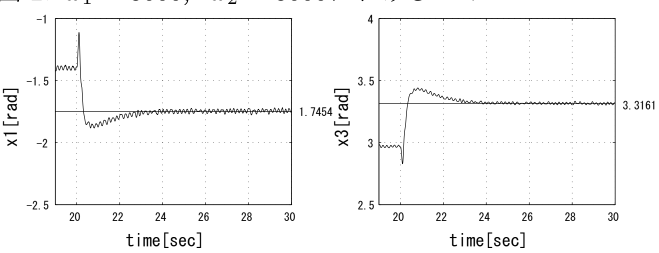

図 3: $w_1 = 3000$，$w_2 = 3000$における実験

6　検証

評価関数と重みと過渡特性の関係を考察するため，目標値追従性を評価する実験を行い，相関性が強いと思われる，重みw_1とオーバーシュート量A_{max}，重みw_2と整定時間T_sの散布図を図4，5に示す.

図より，w_1の増加がA_{max}の減少を，w_2の増加がT_sの減少を引き起こしていることがわかる．これは式(5)，(6)より，w_1は$\tilde{x}(t)$にかかるため，値が大きくなればA_{max}は減

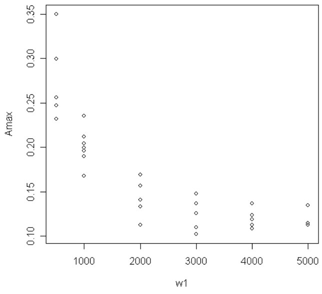

図 4: w_1とA_{max}の散布図

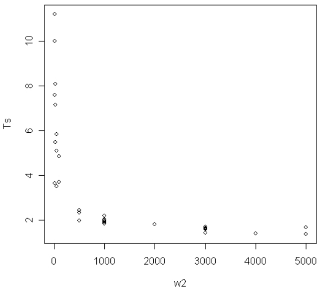

図 5: w_2とT_sの散布図

少し，過渡応答の抑制に作用している．また同様に，w_2は$\tilde{z}(t)$にかかっている積分ゲインであり，値が大きくなれば偏差の制御信号を積分し続ける作用を助長するため，T_sが短縮され，速応性が向上する．

7　パレート最適解

複数の目的関数があり，全ての目的関数に関して優位性をもつ解が存在しない限り，その解は**パレート最適解**である．また，パレート最適解でない解は劣解とよぶ[2]．本研究ではオーバーシュートと整定時間を最小化するシステムの設計を目的とし，多目的最適化問題としてパレート最適解の概念に基づいて重みを選定する．図6は実験を行ったときのオーバーシュート量A_{max}と整定時間T_sの散布図である．なお，黒点はパレート最適解を表している．

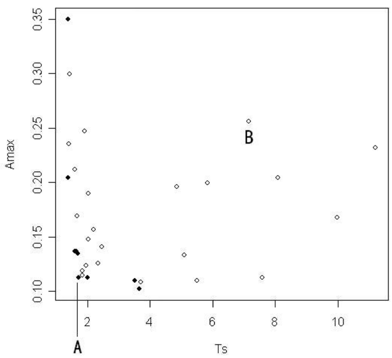

図 6: 実験結果のパレート最適解

パレート最適解と劣解を比較するため，図6に示す点A($q_1 = 5000, q_2 = 5000$)，点B（$q_1 = 500, q_2 = 30$）の各リンクの角度[rad]を図7，8で比較する．

Aはパレート解であるため，Bに比べてオーバーシュートも整定時間も小さいことがわかる．これは重みの増加によりフィードバックゲインが大きくなったことで，過渡特性が向上したということの表れであるが，その分操作量も図9が示すように増大し，ハードへ負荷がかかるため，一概に重みを大きくするのでなく，目的に応じた重みの選定が重要である．黒点で示されたものはパレート最適解であるため，オーバーシュートまたは整定時間のいずれかが最小となる重みである．

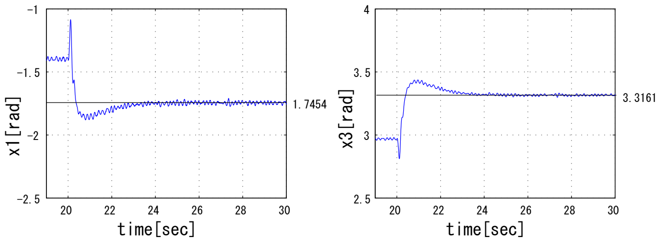

図 7: A : $q_1 = 5000, q_2 = 5000$の実験

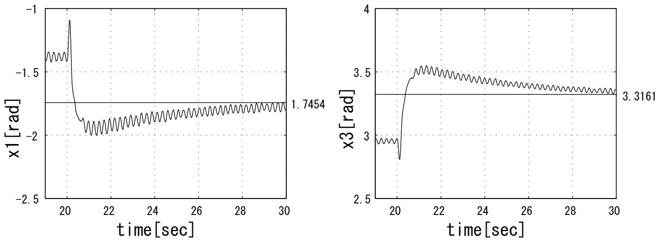

図 8: B : $q_1 = 500, q_2 = 30$の実験

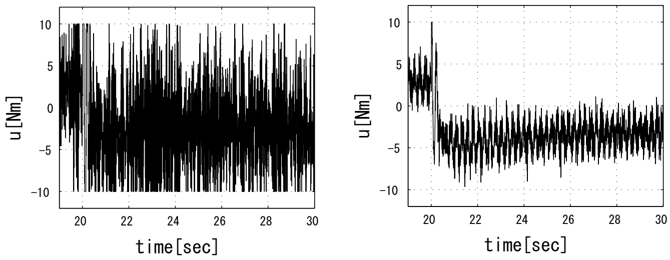

図 9: A(左),B(右)の入力値の比較

8　おわりに

本研究の主な成果は以下の３点である

- 積分器拡大系の最適レギュレータによる倒立振子の安定化制御の実証．
- シミュレーションと実験結果を酷似させることができた
- オーバーシュートと整定時間をパレート最適の概念に基づいて最小化する重みの選定．

参考文献

[1] 美多勉：非線形制御入門ー劣駆動ロボットの技能制御論ー，昭晃堂，(2000).

[2] 西村和雄：ミクロ経済学，岩波書店，(1995).

[3] 池田雅夫，須田信英：積分型最適サーボ系の構成，計測自動制御学会論文集，Vol. 24，No. 1，pp. 40–46 (1988).

[4] 椹木義一，中山弘隆：多目的決定の動向と展望，システムと制御，Vol. 28, No. 11, pp. 1–7 (1984).