自然数の体系から不完全性定理へ

2004MM088　山田敏成

指導教員: 佐々木克巳

1　はじめに

本研究の目的は、田中[2]を参考に、不完全性定理について理解することである。ここで述べる不完全性定理は、表現可能性を論拠にしなければならない。ここでは、この表現可能性について述べる。具体的には、任意の計算可能関数、計算可能述語は、適当なΣ_1論理式、適当なΠ_1論理式でPAにおいて表現されることの証明の一部を述べる。

2　表現可能性

この章では、表現可能性を定義する。数の通常の表現に対し、それを表現する数字を「」で記すことにする。また、以下で用いるPAの定義は田中[2]にゆずる。

定義 (表現可能性)

(1)　Rを自然数上のk変数述語とし、$\phi(\vec{x})$を$x_1, \cdots, x_{\mathrm{k}}$以外には自由変数を含まない論理式とする。いま、任意の自然数$n_1, \cdots, n_k$に対して

$R(n_1, \cdots, n_k)$が成り立つとき$PA \vdash \phi(\ulcorner n_1 \lrcorner, \cdots, \ulcorner n_k \lrcorner)$

$R(n_1, \cdots, n_k)$が成り立たないとき

$$PA \vdash \neg\, \phi(\ulcorner n_1 \lrcorner, \cdots, \ulcorner n_k \lrcorner)$$

を満たすならば、「述語RはPAにおいて論理式$\phi(\vec{x})$によって表現される」という。また、このように論理式が存在するときに、「述語RはPAにおいて表現可能である」という。

(2)　fを自然数上のk変数関数とし、$\phi(\vec{x}, y)$を$x_1, \cdots, x_k, y$以外には自由変数を含まない論理式とする。いま、$(k+1)$変数述語

$$f(n_1, \cdots, n_k) = n_{k+1}$$

がPAにおいて$\phi(x_1, \cdots, x_k, x_{k+1})$によって表現され、

$$PA \vdash \forall y \forall z((\phi(x_1, \cdots, x_{\mathrm{k}}, y) \wedge \phi(x_1, \cdots, x_{\mathrm{k}}, x_{k+1}) \supset y = z)$$

が任意の自然数$n_1, \cdots, n_k$に対して成り立つならば、「関数fはPAにおいて論理式$\phi(\vec{x}, y)$によって表現される」という。また、このような論理式が存在するときに、「関数fはPAにおいて表現可能である」という。

3　計算可能関数の表現定理

ここでは、計算可能関数の表現定理を考えていく。その前にPAにおける(Σ_1/Π_1)論理式での表現可能性について説明していく。

まずΣ_1論理式を以下の(1)-(3)で再帰的に定義する。

(1)$t = u, \neg\,(t = u), t < u, \neg\,(t < u)$(ただし$t, u$は項)という形の論理式はすべて$\Sigma_1$論理式である。

(2)ϕ 'とϕ ''がΣ_1論理式で、xが変数でtがxを含まない項ならば、ϕ '$\wedge$ ϕ '', ϕ '$\vee$ ϕ '', $\exists x \phi'$, $(\forall x < t)\phi$ 'という形の論理式はすべてΣ_1論理式である。

(3)Σ_1論理式ψが存在して$PA \vdash \phi \equiv \psi$ならば、$\phi$も$\Sigma_1$論理式である。

そしてΣ_1論理式の否定と同値なものをΠ_1論理式とする。

定理(計算可能関数・計算可能述語の表現可能性)

(1)PAにおいて表現可能な関数や述語はすべて計算可能である。

(2)任意の計算可能関数、計算可能述語は、適当なΣ_1論理式、適当なΠ_1論理式でPAにおいて表現される。

ここでは(2)を証明したいが、そのために、計算可能関数の表現可能性を示す。

4　計算可能関数の表現定理

つぎの定理を計算可能関数の表現定理という。

定理4.1　(計算可能関数の表現定理)

任意の計算可能関数は、適当なΣ_1論理式ならびに適当なΠ_1論理式によって、PAにおいて表現される。

田中[2]では、この定理を次の4つから証明している。

補助定理4.2　関数fが再帰的であることを計算可能であることは同等である。

補助定理4.3　任意の再帰的関数は$Recu$に属す。

補助定理4.4　関数fに対して、次の2条件は同値である。

(条件1)fがPAにおいて論理式$\phi(x_1, \cdots, x_k, y)$によって表現される。

(条件2)任意の自然数$n_1, \cdots, n_k$に対して

$PA \vdash \forall y(y = \ulcorner f(n_1, \cdots, n_k) \lrcorner \equiv \phi(\ulcorner n_1 \lrcorner, \cdots, \ulcorner n_k \lrcorner, y))$

補助定理4.5　$Recu$に属する任意のk変数関数に対して補助定理4.4の(条件2)をみたす、Σ_1のグラフ論理式$\phi^{\Sigma}(x_1, \cdots, x_k, y)$と$\Pi_1$のグラフ論理式$\phi^{\Pi}(x_1, \cdots, x_k, y)$が存在する。

本稿では、補助定理4.4の証明をする。

まず、PAが等号の公理をもつことを述べておく。以下の文を等号に関する公理と呼ぶ。

$Eq0$:　$\forall x(x = x) \wedge \forall x \forall y(x = y \supset y = x) \wedge \forall x \forall y \forall z(x = y \wedge y = z \supset x = z)$

言語Lに属する各記号Rについて

$Eq(R)$:　$\forall x_0 \cdots \forall x_{n-1} \forall y_0 \cdots \forall y_{n-1}(x_0 = y_0 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} = y_{n-1} \wedge R(x_0, \cdots, x_{n-1}) \supset R(y_0, \cdots, y_{n-1}))$

これらをあわせて、Eqとおく。PAはEqを公理としてもつ。

さて、補助定理4.4を証明する。

まず、「(条件1)⇒(条件2)」を示す。そこで

$PA \vdash \forall y(y = \ulcorner f(n_1,\cdots,n_k)\urcorner \supset \phi(\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner,y))$

を考えていく。

まず、fが$\phi(n_1,\cdots,n_k,y)$によって表現されるので、

$f(n_1,\cdots,n_k)=n_{k+1}$ならば

$PA \vdash \phi(\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner,\ulcorner n_{k+1}\urcorner)$

である。これより、

$f(n_1,\cdots,n_k)=f(n_1,\cdots,n_k)$ならば

$PA \vdash \phi(\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner,\ulcorner f(n_1,\cdots,n_k)\urcorner)$

となる。$f(n_1,\cdots,n_k)=f(n_1,\cdots,n_k)$であるから、

$PA \vdash \phi(\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner,\ulcorner f(n_1,\cdots,n_k)\urcorner)$-

を得る。

ここでEqの

$Eq(R): PA \vdash \ulcorner n_1\urcorner=\ulcorner n_{1,}\urcorner\wedge\cdots\wedge\ulcorner n_k\urcorner=\ulcorner n_k\urcorner\wedge y=\ulcorner f(n_1,\cdots,n_k)\urcorner\wedge\phi(\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner,\ulcorner f(n_1,\cdots,n_k)\urcorner)\supset\phi(\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner,y)$

から、

$PA \vdash \forall y(y = \ulcorner f(n_1,\cdots,n_k)\urcorner \supset \phi(\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner,y))$

である。

つづいて

$PA \vdash \forall y(\phi(\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner,y)\supset y = \ulcorner f(n_1,\cdots,n_k)\urcorner)$

を考える。まず、(条件1)より、

$$PA \vdash \forall y\forall z((\phi(\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner,y)\wedge \phi(\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner,z))\supset y=z)$$

ということが任意の自然数$n_1,\cdots,n_k$に対して成り立っているので、zに「$f(n_1,\cdots,n_k)$」を代入して

$$PA \vdash \forall y((\phi(\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner,y)\wedge \phi(\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner,\ulcorner f(n_1,\cdots,n_k)\urcorner)) \supset y=\ulcorner f(n_1,\cdots,n_k)\urcorner)$$

を得る。　より、

$PA \vdash \forall y(\phi(\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner,y)\supset y = \ulcorner f(n_1,\cdots,n_k)\urcorner)$

である。

$PA \vdash \forall y(y = \ulcorner f(n_1,\cdots,n_k)\urcorner \supset \phi(\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner,y))$ と$PA \vdash \forall y(\phi(\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner,y)\supset y = \ulcorner f(n_1,\cdots,n_k)\urcorner)$という二つのことから、(条件2)すなわち、

$PA \vdash \forall y(y = \ulcorner f(n_1,\cdots,n_k)\urcorner \equiv \phi(\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner,y))$

を得た。

次に、「(条件2)⇒(条件1)」を示す。すなわち、(条件2)から次の三つを証明する。

(1)$f(n_1,\cdots,n_k)=n_{k+1}$ が成り立つならば

$PA \vdash \phi(\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner,\ulcorner n_{k+1}\urcorner)$

(2)$f(n_1,\cdots,n_k)\neq n_{k+1}$ が成り立つならば

$PA \vdash \neg\phi(\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner,\ulcorner n_{k+1}\urcorner)$

(3)$PA \vdash \forall y\forall z((\phi(\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner,y)\wedge \phi(\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner,z))\supset y=z)$

(1)を示す。$f(n_1,\cdots,n_k)=n_{k+1}$なので$PA\vdash\ulcorner n_{k+1}\urcorner=\ulcorner f(n_1,\cdots,n_k)\urcorner$である。(条件2)の$y$に「$n_{k+1}$」を代入したものから、

$$PA \vdash (\ulcorner n_{k+1}\urcorner=\ulcorner f(n_1,\cdots,n_k)\urcorner\supset \phi(\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner,\ulcorner n_{k+1}\urcorner))$$

を得る。この二つのことから、

$f(n_1,\cdots,n_k)=n_{k+1}$ が成り立つならば

$PA \vdash \phi(\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner,\ulcorner n_{k+1}\urcorner)$

である。

次に(2)を示す。(条件2)より、

$$PA \vdash \forall y(\neg(y=\ulcorner f(n_1,\cdots,n_k)\urcorner)\supset \neg\phi(\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner,y))$$

である。上のyに「n_{k+1}」を代入すると、

$$PA \vdash (\neg(\ulcorner n_{k+1}\urcorner=\ulcorner f(n_1,\cdots,n_k)\urcorner)\supset \neg\phi(\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner,\ulcorner n_{k+1}\urcorner))$$

である。ここで$f(n_1,\cdots,n_k)\neq n_{k+1}$なので、

$PA \vdash \neg(\ulcorner n_{k+1}\urcorner=\ulcorner f(n_1,\cdots,n_k)\urcorner)$

である。この二つのことから、

$f(n_1,\cdots,n_k)\neq n_{k+1}$ が成り立つならば

$PA \vdash \neg\phi(\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner,\ulcorner n_{k+1}\urcorner)$

である。

(3)を示す。(条件2)より

$PA \vdash \forall y(\phi(\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner,y)\supset y = \ulcorner f(n_1,\cdots,n_k)\urcorner)$

であり、またさらに

$PA \vdash \forall z(\phi(\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner,z)\supset z = \ulcorner f(n_1,\cdots,n_k)\urcorner)$

である。よって、

$$PA \vdash \forall y\forall z((\phi(\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner,y)\wedge\phi(\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner,z))\supset y=\ulcorner f(n_1,\cdots,n_k)\urcorner\wedge z=\ulcorner f(n_1,\cdots,n_k)\urcorner)$$

なので、

$$PA \vdash \forall y\forall z((\phi(\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner,y)\wedge \phi(\ulcorner n_1\urcorner,\cdots,\ulcorner n_k\urcorner,z))\supset y=z)$$

5　おわりに

本研究では、補助定理4.4を証明したのだが、自分ではわからないところが多くあった。条件2⇒条件1を3つの定理で分けるなど、この研究を手助けしてもらった指導教員である佐々木克巳教授や友達に感謝している。

また、反省点として、不完全性定理について理解していくということだったのだが、不完全性定理に進むことができなかった。

参考文献

[1] 田中一之：ゲーデルと20世紀の論理学2, 東京大学出版会.(2007)

[2] 田中一之：ゲーデルと20世紀の論理学3,東京大学出版会.(2007)