代数方程式に対する同時反復法
—マルチロックオン系解法—

2004MM061　大嶽直幸
指導教員: 杉浦洋

1　はじめに

n次代数方程式$P_n(n)=0$のn個の解を全て一挙に求める数値解法である同時反復法を考える．ＤＫ法は，代数方程式の解と係数の関係をn個の解に対する方程式とみなし，それをn次元Newton法で解くことと等価である．DK法は２次の同時反復法である．ＤＫ法をさらに発展させたものがEhrlish-Aberth(Aberth法)である．Aberth法は，３次の同時反復法である．
解を安定して収束させる為(解を少ない反復，少ない誤差で見つけ出す為)には，初期値の取り方が重要となってくる．ここでは，Aberthの初期値と小澤の初期値の取り方を比較する．

2　1変数代数方程式の数値解法

$z_1^{(0)},\cdots,z_n^{(0)}$を初期値とするDK法の反復公式は，

$$z_i^{(k+1)}=z_i^{(k)}-\frac{P(z_i^{(k)})}{\prod_{j=1,j\neq i}^{n}(z_i^{(k)}-z_j^{(k)})}\quad(i=1,2,\cdots,n) \tag{1}$$

である．同じくAberth法の反復公式は，

$$z_i^{(k+1)}=z_i^{(k)}-\frac{P_n(z_i^{(k)})/P_n'(z_i^{(k)})}{1-\frac{P_n(z_i^{(k)})}{P_n'(z_i^{(k)})}\Sigma_{j=1,j\neq i}^{n}\frac{1}{z_i^{(k)}-z_j^{(k)}}} \tag{2}$$

である．

3　初期値の配置

3.1　Aberthの初期値

一般の反復法と同様に，DK法，Aberth法についても，初期値と実際の解との距離が小さくないと，収束に時間がかかることが知られている．しかし，解の集合を包囲するように初期値を配置すると，安定した収束が得られることも経験的に知られている．Aberthの初期値はこの経験則を用いたものである．と呼ばれる方法についてその概略を説明する．
まず，多項式$P_n(z)=0$の解$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$の複素平面上での重心は次のように表される．

$$c=\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}=-\frac{a_1}{na_0}$$

そこで，この重心を円の中心に持ち，上の解が全て円の内部に含まれるような半径Rの円周上に，初期値を次のように配置する．

$$z_j^{(0)}=c+R\exp\left(i\Big(\frac{2\pi(j-1)}{n}+1\Big)\right)\qquad(j=1,2,\cdots,n)$$

ここで，半径Rは$z=\omega+c$を多項式$P_n(z)=0$に代入して得られるωの代数方程式

$$P_n(\omega+c)=b_0\omega^n+b_2\omega^{n-2}+b_3\omega^{n-3}+\cdots+b_{n-1}\omega+b_n=0 \tag{3}$$

の解の絶対値$|\omega|$の上界であればよい(ここで，$b_1=0$となることに注意)．例えば，$b_2,b_3,\cdots,b_n$の中で，0でないものの個数をmとしたとき(ただし，$m\geq 1$と仮定する)，

$$R=\max_{2\leq j\leq n}\left(m\frac{|b_j|}{|b_0|}\right)^{1/j}$$

とおけばよい．なお，式(3.1)は，多項式$P_n(z)$の重心cを中心とするTaylor展開になっていることがわかるので，係数は多項式$P_n(\omega)$の微分係数に相当する．すなわち，

$$b_{n-j}=\frac{1}{j!}\cdot\frac{d^jP_n(c)}{d\omega^j}$$

である．したがって，これはHorner法で求めることができる．

3.2　小澤の初期値

次に，秋田県立大学の小澤一文氏による初期値の配置方法[3]を紹介する．重心cから各解α_iまでの距離を

$$r_i=|\alpha_i-c|\qquad(i=1,\cdots,n)$$

と表し，幾何平均をとると，

$$r=(r_1r_2\cdots r_n)^{1/n}$$

となる．ここで，

$$P(z)=\Sigma_{k=0}^{n}b_k(z-c)^k$$
$$=\Sigma_{k=0}^{n}b_k\omega^k=Q(\omega)\qquad(\omega=z-c)$$

とすると，

$$Q(\alpha_i-c)=\Sigma_{k=0}^{n}b_k(\alpha_i-c)^k=P(\alpha_i)=0$$

となり，根と係数の関係より，

$$\frac{b_n}{b_0}=(-1)^n(\alpha_1-c)\cdots(\alpha_n-c)$$

よって，

$$r=\left(\left|\frac{b_n}{b_0}\right|\right)^{1/n}=((|\alpha_1-c|)\cdots(|\alpha_n-c|))^{1/n}$$

となる．
重心から各解までの幾何平均を半径とする円周上に初期値を配置するこの方法を，ここでは小澤の初期値と呼ぶ．
また，小澤の初期値は，重心から大きく離れた解が少数存在するような方程式に対して特に有効であると報告されている．

4　数値実験

この章では，Mathematicaを用いて数値実験を行った．解くべき方程式の次数を10次，15次，20次とし，それぞれの次数について，解の実部，虚部を，区間[-1,1]の一様乱数とした方程式を100個用意した．初期値の取り方として，Aberthの初期値と小澤の初期値，反復法として，DK法とAberth法を組み合わせて４つの解法を構成する．すべての近似値$z_l^{(k)}(1 \leq l \leq n)$について$|P_n(z_l^{(k)})| \leq 10^{-10}$が成立したとき，反復法は収束したとみなし，停止させた．また，乱数は同じものを使用するように設定し，同じ次数では，各解法は全く同じ問題群を解いている．それぞれの組み合わせについて実験を行い，１００回の方程式を全て解くのに要した時間(実行時間)，反復回数の平均と分散を求めた．これにより，４つの解法の中でどれが安定で効率的かを判定する．

4.1　Aberthの初期値を用いたDK法，Aberth法

Aberthの初期値を用いたDK法，Aberth法の実験を行った．DK法での実験結果は下の表のとおりである．

表 1: Aberthの初期値とDK法の結果

次数	実行時間	平均反復回数	分散
10次	7.26秒	33.99回	18.01
15次	25.69秒	59.63回	43.993
20次	66.14秒	120.204回	120.204

Aberth法での実験結果は下の図のとおりである．

表 2: Aberthの初期値とAberth法の結果

次数	実行時間	平均反復回数	分散
10次	7.571秒	24.1回	18.3737
15次	27.068秒	41.46回	68.0058
20次	68.128秒	61.41回	184.042

以上の結果に共に失敗例は無く，どちらも合計３００個の方程式の全ての解を求めることに成功した．Aberth法は，平均反復回数は少ないが，分散が大きく，回数のばらつきが多い．DK法は，平均反復回数が多いが，実行時間は短い．これは，DK法のアルゴリズムが単純で，１回反復あたりの計算量が少ないためである．ゆえに，Aberthの初期値を用いた場合は，DK法が解法として適していると考えられる．

4.2　小澤の初期値を用いたDK法，Aberth法

小澤の初期値を用いたDK法，Aberth法の実験を行った．DK法での実験結果は下の表のとおりである．

Aberth法での実験結果は下の図のとおりである．

以上の結果に共に失敗例は無く，どちらも合計300回の方程式の全ての解を求めることに成功した．実行時間，平均反復回数，分散の全ての面で，Aberth法が優れている．これは，４通りの解法の中で最も優秀である．以上より，

表 3: 小澤の初期値とDK法の結果

次数	実行時間	平均反復回数	分散
10次	2.945秒	13.43回	13.43
15次	9.113秒	20.53回	56.6759
20次	23.894秒	31.96回	163.291

表 4: 小澤の初期値とAberth法の結果

次数	実行時間	平均反復回数	分散
10次	2.393秒	7.11回	1.83626
15次	5.758秒	8.24回	2.10343
20次	10.786秒	9.25回	2.57323

小澤の初期値によるAberth法が，実行時間，反復回数，安定の面で最良であると結論した．

5　おわりに

１変数代数方程式の全ての解を求める同時反復解法である，DK法，Aberth法のプログラムを作成し，２つの初期値の取り方，Aberthの初期値，小澤の初期値と組み合わせ，収束性と解の効率を調べた．用意した全ての問題で，DK法，Aberth法とも，全ての解を求めることができた．初期値の取り方については，小澤の初期値が適している．反復回数は，どちらの初期値でもAberth法の方が少ない．しかし，Aberth法はDK法に比べて１回反復あたりの計算量が多いため，Aberthの初期値においては，DK法より実行時間が多くかかってしまった．反復法と初期値の取り方の組み合わせを４通り比べた結果，Aberth法と小澤の初期値の組み合わせが，実行時間，反復回数，分散の全ての面で最も優秀であることがわかった．

参考文献

[1] 藤野清次：数値計算の基礎，サイエンス社(1998).

[2] 山本哲朗：数値解析入門，サイエンス社(2005).

[3] 小澤一文：Durand-Kerner法の効率的な初期値の簡単な設定法，日本応用数理学会論文誌,Vol.3,No.4,(1993),pp.451-464.