シークエント計算における$\varepsilon-\delta$論法の記述

2004MM060 長田義弘

指導教員: 佐々木克巳

1 はじめに

高校数学で学ぶ極限の表現方法のひとつに$\varepsilon-\delta$論法がある．本研究では，$\varepsilon-\delta$論法をシークエント計算により記述し，かつその中で，実際の証明との対応を考察していくことを目的とする．

2 シークエント計算LK

述語論理の言語

1. 論理結合子　$\wedge, \vee, \supset, \neg, \perp$
2. 量化記号　$\forall$(全称記号), $\exists$(存在記号)
3. 対象変数　$\varepsilon, \delta, n, m, p, q, a, b, \cdots$
4. 対象定数　$0, 1, 2, 3, \cdots$
5. 1変数関数記号　$x_{()}, y_{()}, z_{()}, ()^2, |()|$
6. 2変数関数記号 $+, -, *, /$
7. 2変数述語記号　$=, \leq, <$
8. その他の関数記号　max, min
9. 補助記号 (,), , (コンマ)

述語論理における項と論理式

項及び論理式は小野[2] に従って定義する．

シークエント(式)

ここでは$A, B, \cdots, A_1, A_2, \cdots$を論理式を表す記号として用いる．

定義1.3(シークエント)

m, nを0以上の整数とすると，

$$A_1, A_2, \cdots, A_m \to B_1, B_2, \cdots, B_n$$

という形をした表現を式あるいはシークエントという．

公理

本研究では，以下を公理として用いる．

1. $A \to A$
2. $\perp \to$
3. 一般に正しいと判断される数式に対応するシークエント(ただし，$\varepsilon, \delta, a, b$は実数を表す変数,$n, m$は自然数を表す変数と解釈する.)

また，特に表記のない変数，定数は実数上に存在するものとする．さらに，シークエント計算によってできた図，または証明図において一番上にある式を,本研究では始式という．

LKの推論規則

ここで，Γ,Δ,Σ,Πは論理式の列である．

$\frac{\Gamma\to\Delta}{A,\Gamma\to\Delta}$(weakening 左)　$\frac{\Gamma\to\Delta}{\Gamma\to\Delta,A}$(weakening 右)

$\frac{A,A,\Gamma\to\Delta}{A,\Gamma\to\Delta}$(contraction 左)　$\frac{\Gamma\to\Delta,A,A}{\Gamma\to\Delta,A}$(contraction 右)

$\frac{\Gamma,A,B,\Pi\to\Delta}{\Gamma,B,A,\Pi\to\Delta}$(exchange 左)　$\frac{\Gamma\to\Delta,A,B,\Sigma}{\Gamma\to\Delta,B,A,\Sigma}$(exchange 右)

$\frac{\Gamma\to\Delta,A \quad A,\Pi\to\Sigma}{\Gamma,\Pi\to\Delta\Sigma}$(cut)

$\frac{A,\Gamma\to\Delta}{A\wedge B,\Gamma\to\Delta}$($\wedge$ 左1)　$\frac{B,\Gamma\to\Delta}{A\wedge B,\Gamma\to\Delta}$($\wedge$ 左2)

$\frac{\Gamma\to\Delta,A \quad \Gamma\to\Delta,B}{\Gamma\to\Delta,A\wedge B}$($\wedge$ 右)　$\frac{A,\Gamma\to\Delta \quad B,\Gamma\to\Delta}{A\vee B,\Gamma\to\Delta}$($\vee$ 左)

$\frac{\Gamma\to\Delta,A}{\Gamma\to\Delta,A\vee B}$($\vee$ 右1)　$\frac{\Gamma\to\Delta,B}{\Gamma\to\Delta,A\vee B}$($\vee$ 右2)

$\frac{\Gamma\to\Delta,A \quad B,\Pi\to\Sigma}{A\supset B,\Gamma,\Pi\to\Delta,\Sigma}$($\supset$ 左)　$\frac{A,\Gamma\to\Delta,B}{\Gamma\to\Delta,A\supset B}$($\supset$ 右)

$\frac{A,\Gamma\to\Delta}{\Gamma\to\Delta,\neg A}$($\neg$ 右)　$\frac{\Gamma\to\Delta,A}{\neg A,\Gamma\to\Delta}$($\neg$ 左)

$\frac{\Gamma\to\Delta,A[z/x]}{\Gamma\to\Delta,\forall xA}$($\forall$右)　$\frac{A[t/x],\Gamma\to\Delta}{\forall xA,\Gamma\to\Delta}$($\forall$左)

$\frac{\Gamma\to\Delta,A[t/x]}{\Gamma\to\Delta,\exists xA}$($\exists$右)　$\frac{A[z/x],\Gamma\to\Delta}{\exists xA,\Gamma\to\Delta}$($\exists$左)

量化記号の推論規則について，tは項であり，zは変数である．変数zは下式においてどの論理式にも自由な出現を持たない場合に限られる．　本稿では($weakening$左)を(W左)と表記する．また，($contraction$),($exchange$)は特に表記しない．さらに，($\wedge$左1),($\wedge$左2)は($\wedge$左)，($\vee$右1),($\vee$右2)は($\vee$右)と表記し，特に区別はつけないものとする．

上記の推論規則から次の推論規則が導き出せる．

$$\frac{\neg A, \Gamma \to \perp}{\Gamma \to A}\ (RAA)$$

証明図と証明可能性

小野[2]の定義を用いる．公理から出発し，それに推論規則を次々に適用していく過程をすべて記述したものをLKの証明図という．証明図の一番下にある式を，その証明図の終式という．

また，式Sを終式とするような証明図が存在するときには，SはLKで証明可能であるという．

3 $\varepsilon-\delta$論法

この節では田島[1]に従い$\varepsilon-\delta$論法に関する定義を列挙する．

定義(数列の極限)

数列$\{x_n\}$において任意の正数εに対して, 適当な番号mを定めると，

$$n > m\text{のすべての}n\text{に対して}|x_n - a| < \varepsilon$$

となるならば，これを

$$n \to \infty \quad \text{のとき}x_n \to a$$

あるいは

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

と表し, この場合，数列$\{x_n\}$はaに収束するという．また，aを数列$\{x_n\}$の極限値という．

数列$\{x_n\}$がaに収束することをシークエントで表すと次のようになる．

$\rightarrow \forall\varepsilon(\varepsilon > 0 \supset \exists m(\forall n(n > m \supset |x_n - a| < \varepsilon)$

定義(関数の極限)

aの近くで定義された関数$f(x)$において，任意の正の数εに対して，適当な正の数δを決めると，

$0 < |x-a| < \delta$のすべてのxについて$|f(x) - b| < \varepsilon$

となるならば，これを

$$x \rightarrow a \text{のとき} \quad f(x) \rightarrow b$$

あるいは

$$\lim_{n \to a} x_n = b$$

という記号で表し，$x \rightarrow a$のとき$f(x)$はbに収束するという．また，bを$x \rightarrow a$のときの$f(x)$の極限値という．

$x \rightarrow a$のとき$f(x)$はbに収束するということをシークエントで表すと次のようになる．

$\rightarrow \forall\varepsilon(\varepsilon > 0 \supset \exists\delta(\delta > 0 \wedge (|x-a| < \delta \supset |f(x) - b| < \varepsilon)))$

4 問題へのシークエント計算の対応

ここでは，これまでの研究でとりあげてきた問題について述べる．これらの問題は,田島[1], 石谷[3],東京アカデミー[4]から引用または参考とした．本研究で取り組んだ問題は以下の9つである．

1. $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$
2. $x_n \rightarrow a$ならば$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \rightarrow a$
3. 収束する数列$\{x_n\}$は有界である．
4. $\lim_{n \to \infty} x_n = a, \lim_{n \to \infty} y_n = b$ のとき
   (1) $\lim_{n \to \infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$(複号同順)
   (2) $\lim_{n \to \infty}(x_n y_n) = ab$
5. $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ のとき，
   (1) $\lim_{n \to \infty} cx_n = ca$(ただし,$c$は正の定数)
   (2) $\lim_{n \to \infty} {x_n}^2 = a^2$
6. すべてのnで$x_n > p$であり，かつ $\lim_{n \to \infty} x_n = a$であるとき$a \geq p$
7. すべての$\varepsilon > 0$に対して$a < b + \varepsilon$が成り立つとき、$a \leq b$
8. aが正の定数ならば，$n \rightarrow \infty$　のとき、$a/n \rightarrow 0$
9. $\lim_{n \to a} f(x) = b, \lim_{n \to a} g(x) = c$であるとき，
   (1) $\lim_{n \to a} f(x)g(x) = bc$
   (2) $\lim_{n \to a}\{f(x) + g(x)\} = b + c$

問題を解く手順

1. 問題を定義に従い変換する．
2. $\varepsilon - \delta$論法を用いて証明を行う．
3. 量化記号に対する推論規則に対し，変数の置換を行わずに証明図の作成を試みる．
4. 自由な出現が可能な，$\forall$左,$\exists$右について，始式が公理となるように変数の置換を考える．
5. 証明図を変換させた後，証明図を完成させる．

ここでは問題7のみを記述する．この問題7については上の手順4と手順5を同じ手順とする．

$\varepsilon - \delta$論法を用いた証明

(証明)

任意の正数εに対し$a < b + \varepsilon$が成立すると仮定し，さらに$a > b$と仮定する．

故に,$a - b > 0$であるから$\varepsilon = \dfrac{a-b}{2}$とおくと,$a < b + \varepsilon$より,$\dfrac{a-b}{2} < 0$となり$a - b > 0$に矛盾する．

よって$a \leq b$である．

(証明終了)

シークエント計算

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{a > b \rightarrow \varepsilon > 0 \quad a > b, a < b + \varepsilon \rightarrow \bot}{a > b, \varepsilon > 0 \supset a < b + \varepsilon \rightarrow \bot}(\supset \text{左})}{\varepsilon > 0 \supset a < b + \varepsilon \rightarrow a \leq b}(RAA)}{\forall\varepsilon(\varepsilon > 0 \supset a < b + \varepsilon) \rightarrow a \leq b}(\forall\text{左})$$

ここで，以下では二通りの証明図を示す．証明図(1)はシークエント計算の始式より，変数の置換を実行したものであり，証明図(2)は$\varepsilon - \delta$論法を用いた証明に対応した証明図である．

完成した証明図(1)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{a > b \rightarrow (a-b) > 0 \quad \dfrac{\dfrac{a < a \rightarrow \bot}{a > b, a < a \rightarrow \bot}(W\text{左})}{a > b, a < b + (a-b) \rightarrow \bot}}{a > b, (a-b) > 0 \supset a < b + (a-b) \rightarrow \bot}(\supset \text{左})}{(a-b) > 0 \supset a < b + (a-b) \rightarrow a \leq b}(RAA)}{\forall\varepsilon(\varepsilon > 0 \supset a < b + \varepsilon) \rightarrow a \leq b}(\forall\text{左} \quad \varepsilon = (a-b))$$

完成した証明図(2)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{a > b \rightarrow \dfrac{a-b}{2} > 0 \quad \dfrac{\dfrac{a > b, a < b \rightarrow \bot}{a > b, \dfrac{a}{2} < \dfrac{b}{2} \rightarrow \bot}}{a > b, a < b + \dfrac{a-b}{2} \rightarrow \bot}}{a > b, \dfrac{a-b}{2} > 0 \supset a < b + \dfrac{a-b}{2} \rightarrow \bot}(\supset \text{左})}{\dfrac{a-b}{2} > 0 \supset a < b + \dfrac{a-b}{2} \rightarrow a \leq b}(RAA)}{\forall\varepsilon(\varepsilon > 0 \supset a < b + \varepsilon) \rightarrow a \leq b}(\forall\text{左} \quad \varepsilon = \dfrac{a-b}{2})$$

完成した証明図(1)に対応する証明

(証明)

任意の正数εに対し$a < b + \varepsilon$が成立すると仮定し，さらに$a > b$と仮定する．

よって,$a - b > 0$であるから$\varepsilon = a - b$とおくと,$a < b + \varepsilon$より,$a < a$となり矛盾が生じる．

故に,$a \leq b$である．

(証明終了)

5 おわりに

この研究を通して，シークエント計算による証明でも変数の置換方法が求められることが明らかになった．また，始式を証明可能にするように置換を考えればいいので，置換方法について計算が多少楽になったと考えられる．

参考文献

[1] 田島一郎：イプシロンデルタ, 共立出版(1978).

[2] 小野寛晰：情報科学における倫理，日本評論社(1994).

[3] 石谷茂：$\varepsilon - \delta$に泣く，現代数学社(2006).

[4] 東京アカデミー編:オープンセサミシリーズ2007年度教員採用試験問題集中学・高校数学，東京アカデミー(2007).