ピザ屋における最適問題
—陳腐化商品の最適製造量—

2004MM056 庭山 哲暢

指導教員: 澤木 勝茂

1 はじめに

飲食店を運営するにあたって, 利益を最大化することは, 目標であり一番難しい問題である．利益を多くあげるためには，商品の売り上げを上げるとともに，シフトの無駄を無くし, 商品を作り過ぎないことなどのコストを減らすことも大切である. 特に商品の作り過ぎは直接廃棄しており, 改善することによって利益を増やすことができると考えられる. そこで陳腐化商品であり, ピザ屋の売り上げの大半を占めているピザの生地の最適製造量について研究する.

2 多品種在庫管理モデル

2.1 記号の説明

a	:	L サイズのピザが一枚売れたときの利益
b	:	M サイズのピザが一枚売れたときの利益
c	:	S サイズのピザが一枚売れたときの利益
l	:	L サイズのピザの原価
m	:	M サイズのピザの原価
n	:	S サイズのピザの原価
s	:	L サイズのピザの一枚あたりの品切れ損失
t	:	M サイズのピザの一枚あたりの品切れ損失
u	:	S サイズのピザの一枚あたりの品切れ損失
x_i	:	ピザの製造量 (i=L，M，S)
y_i	:	ピザの需要量 (i=L，M，S)
$P_i(y)$	:	i サイズのピザの需要分布
$e(x_i, y_i)$	:	i サイズの利益
$E(x)$	:	期待利益

2.2 モデルの説明

本節では，新聞売子問題を用いて，利益を最大にする適正在庫を考える．ピザの生地三種類は互いに独立した需要分布にしたがうとする．

2.3 モデルの定式化

各ピザは需要分布 $P_L(y)$，$P_M(y)$，$P_S(y)$ にしたがうとする．よって最適製造量は，以下の解である．

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{y_L=0}^{x_L-1} P_L(y) \le \frac{a+s}{a+l+s}, \sum_{y_L=0}^{x_L} P_L(y) \ge \frac{a+s}{a+l+s} \\ \displaystyle\sum_{y_M=0}^{x_M-1} P_M(y) \le \frac{b+t}{b+m+t}, \sum_{y_M=0}^{x_M} P_M(y) \ge \frac{b+t}{b+m+t} \\ \displaystyle\sum_{y_S=0}^{x_S-1} P_S(y) \le \frac{c+u}{c+n+u}, \sum_{y_S=0}^{x_S} P_S(y) \ge \frac{c+u}{c+n+u} \end{array}\right. \tag{1}$$

3 生地の変更が可能なモデル

3.1 モデルの説明

L サイズのピザは、大きさを調節すれば M サイズにすることが可能である．そこで，今回のモデルでは M サイズピザのみを考え，品切れの場合 L サイズから M サイズを製造することにする．そのとき発生する損失を d とし，L サイズ，S サイズの利益は一定とする．

3.2 記号の説明

b	:	M サイズのピザが一枚売れたときの利益
c	:	M サイズのピザの一枚あたりの品切れ損失
m	:	M サイズのピザの原価
d	:	L サイズを M サイズに変更した場合の損失
α	:	L サイズピザが売り切れる確率
x	:	製造量
y	:	需要量
k	:	L サイズピザの利益 (枚数×利益)
j	:	S サイズピザの利益 (枚数×利益)
$P(y)$	:	需要分布
$e(x, y)$	:	利益
$E(x)$	:	期待利益

3.3 モデルの定式化 (離散型)

$e(x, y)$ は

$$e(x,y) = \left\{\begin{array}{ll} by - c(x-y) & (x \ge y \text{ のとき}) \\ (1-\alpha)\{by - d(y-x)\} & \\ +\alpha\{bx - c(y-x)\} & (x < y \text{ のとき}) \end{array}\right. \tag{2}$$

で与えられる. このとき期待利益 $E(x)$ は,

$$\begin{aligned} E(x) &= \sum_{y=0}^{x-1}\{by - m(x-y)\}P(y) \\ &\quad + \sum_{y=x}^{\infty}\{(1-\alpha)by - d(y-x) + \alpha\{bx - c(y-x)\}\}P(y) \end{aligned} \tag{3}$$

の解である．また，最適製造量は

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{y=0}^{x-1} P_M(y) \ge \frac{\alpha(b+c)+(1-\alpha)d}{(1-\alpha)d+\alpha(b+c)+m} \\ \displaystyle\sum_{y=0}^{x} PM(y) \le \frac{\alpha(b+c)+(1-\alpha)d}{(1-\alpha)d+\alpha(b+c)+m} \end{array}\right. \tag{4}$$

となる.

3.4 モデルの定式化 (連続型)

さきほどの問題を連続量として考える．記号は同じように定め，確立密度関数 $f(y)$ の需要分布に従うとする．このとき，期待利益 $E(x)$ は，

$$\begin{aligned}E(x) = &\int_0^x \{by - m(x-y)\}f(y)dy \\ &+ \int_x^\infty \{(1-\alpha)\{by - d(y-x)\} \\ &+ \alpha\{bx - c(y-x)\}\}f(y)dy + k + j \qquad (5)\end{aligned}$$

となる．x は $\frac{dE(x)}{dx} = 0$ の解であるから，上式 x で微分すれば，

$$\begin{aligned}&\frac{dE(x)}{dx} \\ &= -m\int_0^x f(y)dy + \int_x^\infty \{\alpha(b+c)+d\}f(y)dy \qquad (6)\end{aligned}$$

3.4.1 一様分布

ここで，この f(y) を一様分布と仮定する．(0,a) の区間の一様分布の分布関数を,

$$F(y) = \begin{cases} \frac{y}{a} & (0 < a < y) \\ 1 & (a \leq y) \end{cases}$$

とする．(a は予測需要最大値) $\frac{dE(x)}{dx} = 0$ であることが x が最適製造量 $x*$ となるのが必要条件なので，

$$-m\int_0^x f(y)dy + \int_x^\infty \{\alpha(b+c)+d\}f(y)dy = 0 \quad (7)$$

の解となる．($0 \leq x \leq a$ のとき)

$$\frac{dE(x)}{dx} = -m\int_0^x \frac{1}{a}dy \qquad (8)$$

$$\int_x^\infty \{\alpha(b+c)+d\}dy = \frac{-mx}{a} + \frac{\alpha(b+c)+d}{a}(a-x)$$

$$x = \frac{a\{\alpha(b+c)+d\}}{\alpha(b+c)+d+m} \qquad (9)$$

また，

$$\frac{d^2E(x)}{dx^2} = -\{m + \alpha(b+c) + d\} \qquad (10)$$

ここで，$m + d > 0$，$b + c > 0$，$\alpha \geq 0$
よって，$\frac{d^2E(x)}{dx^2}$ が負となるので，$E(x)$ は x に関して上に凸となるから，最適解をもつ．

3.4.2 指数分布

次に，分布関数が

$$F(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda y} & (b \geq 0) \\ 0 & (b < 0) \end{cases}$$

と表される指数分布にしたがうもとのする．このとき，(3.6) 式より，

$$\frac{dE(x)}{dx} = -m\int_0^x \lambda e^{-\lambda y}dy + \int_x^\infty \{\alpha(b+c)+d\}\lambda e^{-\lambda y}dy$$

となり，$\frac{dE(x)}{dx} = 0$ であることが，x が最適発注量 x^* となる必要条件なので

$$-m\int_0^x f(y)dy + \int_x^\infty \{\alpha(b+c)+d\}f(y)dy = 0$$

よって，

$$x = \frac{1}{\lambda}log[\frac{d+m+\alpha b+\alpha c}{m}] \qquad (11)$$

また，

$$\begin{aligned}\frac{d^2E(x)}{dx^2} &= \{e^{-\lambda x} - \frac{d+m+\alpha b+\alpha c}{m}\}' \\ &= -\lambda e^{-\lambda x} \qquad (12)\end{aligned}$$

ここで，$\lambda > 0$，$e > 0$ であるので $-\lambda e^{-\lambda x} < 0$
よって，$\frac{d^2E(x)}{dx^2}$ が負となるので，$E(x)$ は x に関して上に凸となるから最適解をもつ．

4 おわりに

この結果から，期待利益を最大にするためには，原価率が低い商品においては廃棄することを考えた上での最適製造量の決定が求められる．今回，需要分布を仮定して利益を算出したが，需要分布が予想できれば商品の代用が可能であるなどの対応ができ，期待利益もあげることができる．他にも陳腐化商品を扱う上で需要分布からの対応があるので，様々な対応をした場合における利益の比較もしてみたい．

参考文献

[1] 森 信宏：カフェにおける在庫管理モデル-陳腐化商品の最適発注量-, 南山大学数理情報学部数理科学科卒業論文 (2005 年度).

[2] 小和田 正, 澤木 勝茂, 加藤 豊：OR 入門-意志決定の基礎-, 実教出版 (1984).

[3] 水野 幸男：在庫管理入門, 石川秀美堂版 (1974).