数学的帰納法の形式

2004MM051 村田優子
指導教員　佐々木克巳

1　はじめに

本研究は，廣瀬[1]にそって，数学的帰納法の形式の比較を行う．

具体的には，標準的な形式の数学的帰納法と累積帰納法の説明をし，それらの同等性について述べる．さらに，2重帰納法を用いた証明の例を挙げ，それを特殊な形の累積帰納法で解く．

2　標準的な形式の数学的帰納法と累積帰納法

ここでは，標準的な形式の数学的帰納法と累積帰納法の説明をする．

[**標準的な形式の数学的帰納法**]

(MI-i) $Q(0)$が成り立つ

(MI-ii) 任意の自然数kについて，$Q(k)$が成り立つと仮定すれば$Q(k+1)$が成り立つ

以上の(MI-i,ii)から，

(CMI) すべての自然数xについて$Q(x)$が成り立つ

ことが結論される．

[**累積帰納法**]

(CVI) 任意の自然数kについて，$n<k$なるすべての自然数nに対して$Q(n)$が成り立つと仮定すれば$Q(k)$が成り立つ

上の(CVI)から，

(CMI) すべての自然数xについて$Q(x)$が成り立つ

ことが結論される．

累積帰納法は，標準的な形式の数学的帰納法の(MI-ii)で，“ 任意の自然数kについて，$Q(k)$が成り立つと仮定すれば$Q(k+1)$も成り立つ ”ことを証明する代わりに，“ 任意の自然数kについて，$n<k$なるすべての自然数nに対して$Q(n)$が成り立つと仮定すれば$Q(k)$も成り立つ ”ことを証明する，という形式をとる帰納法である．

3　標準的な形式の数学的帰納法と累積帰納法の同等性

次の定理は，以下の補助定理1〜3より導かれる．

定理　標準的な形式の数学的帰納法と累積帰納法は，同等である．

補助定理1．「累積帰納法から，標準的な形式の数学的帰納法が導かれる．」

補助定理2．「自然数の全体Nの空でない任意の部分集合には，最小の要素が存在する．」

補助定理3．「（標準的な形式の数学的帰納法を含む）自然数の性質から，累積帰納法が導かれる．」

4　2重帰納法

ここでは，2重帰納法の形式を説明し，例を挙げる．さらにそれを特殊な形の累積帰納法で解く．

4.1　2重帰納法の形式

2重帰納法とは，

“ すべての自然数x,yについて$Q(x,y)$が成り立つ ”

の証明を，次の(1)や(2)などの形式で行う帰納法である：

(1)　(I)すべての自然数yについて$Q(0,y)$が成り立つ
(II)すべての自然数xについて$Q(x,0)$が成り立つ
(III)任意の自然数x,yについて，$Q(x+1,y)$と$Q(x,y+1)$がともに成り立つと仮定すれば$Q(x+1,y+1)$ も成り立つ

同様に，これをさらに拡張したものがk重帰納法である．

(2)　(I)$x \leq y$をみたすすべての自然数x,yについて$Q(x,y)$が成り立つ
(II)すべての自然数xについて$Q(x,0)$が成り立つ
(III)任意の自然数x,yについて，$Q(x,y)$と$Q(x,y-1)$がともに成り立つと仮定すれば$Q(x+1,y)$も成り立つ

(1)は，廣瀬[1]で紹介された形式である．

4.2　2重帰納法を用いた例

2つの自然数n,rについての次の命題$P(n,r)$をn,rの2重帰納法で示す．

ここで用いる2重帰納法は，4.1で述べた形式(2)である．

命題$P(n,r)$ ：

$$ {}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}, (n \geq r) $$

ここでは，次の性質を用いる．

性質 ： ${}_{n+1}\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_r + {}_n\mathrm{C}_{r-1}$

(**証明**) すべてのn,rについて命題を示すためには，次の(i)〜(iii)を示せばよい．

(i)$P(k,k)$が成り立つことを示す．

$$ 左辺 = {}_k\mathrm{C}_k = 1 $$
$$ 右辺 = \frac{k!}{k!\cdot(k-k)!} = 1 $$

となる．よって，左辺=右辺=1となり成り立つ．

(ii)$P(k,0)$が成り立つことを示す．

$$ 左辺 = {}_k\mathrm{C}_0 = 1 $$
$$ 右辺 = \frac{k!}{0!\cdot(k-0)!} = 1 $$

となる．よって，左辺=右辺=1となり成り立つ．

(iii)$P(k,l)$，$P(k,l-1)$が成り立つと仮定して，$P(k+1,l)$が成り立つことを示す．

つまり仮定は,

$$ {}_{k}\mathrm{C}_{l} = \frac{k!}{l!\cdot(k-l)!},\ {}_{k}\mathrm{C}_{l-1} = \frac{k!}{(l-1)!\cdot(k-l+1)!} $$

である.

性質より,

$$ {}_{k}\mathrm{C}_{l} + {}_{k}\mathrm{C}_{l-1} = {}_{k+1}\mathrm{C}_{l} \cdots\cdots $$

である.

また, 仮定より,

$$ \begin{aligned} {}_{k}\mathrm{C}_{l} + {}_{k}\mathrm{C}_{l-1} &= \frac{k!}{l!\cdot(k-l)!} + \frac{k!}{(l-1)!\cdot(k-l+1)!} \\ &= \frac{k!\cdot(k-l+1)}{l!\cdot(k-l+1)!} + \frac{l\cdot k!}{l!\cdot(k-l+1)!} \\ &= \frac{k!\cdot(k+1)!}{l!\cdot(k+1-l)!} \\ &= \frac{(k+1)!}{l!\cdot(k+1-l)!} \cdots\cdots \end{aligned} $$

となる.

, より,

$$ {}_{k+1}\mathrm{C}_{l} = \frac{(k+1)!}{l!\cdot(k-l+1)!} $$

となり, $P(k+1,l)$が示された.

以上の(i)〜(iii)より, すべてのn,rについて命題は示された.

4.3 2重帰納法を用いた例を特殊な形の累積帰納法で解く

kについての命題$Q(k)$を

$Q(k)$: $n+r=k$をみたすすべての(n,r)に対して, $P(n,r)$が成り立つ

とおき, これを次の形の帰納法で示すことによって, 4.2の命題を示す:

(I)$Q(0)$が成り立つ

(II)$Q(1)$が成り立つ

(III)任意のkについて, $Q(k-1)$と$Q(k)$がともに成り立つと仮定すれば$Q(k+1)$が成り立つ$(k\geq 1)$.

この形は, 累積帰納法の特殊な形と考えることができる.

(**証明**) すべてのkについて命題を示すためには, 次の(i)〜(iii)を示せばよい.

(i)$k=0$のとき$P(n,r)$が成り立つことを示す.

$n+r=0$となり, $n=0,r=0$である. よって,

$$ 左辺 = {}_{0}\mathrm{C}_{0} = 1 $$

$$ 右辺 = \frac{0!}{0!\cdot(0-0)!} = 1 $$

となる. よって, 左辺=右辺=1となり成り立つ.

(ii)$k=1$のとき$P(n,r)$が成り立つことを示す.

$n+r=1$となり, $n\geq r$の自然数なので, $n=1,r=0$である. よって,

$$ 左辺 = {}_{1}\mathrm{C}_{0} = 1 $$

$$ 右辺 = \frac{1!}{0!\cdot(1-0)!} = 1 $$

となる. よって, 左辺=右辺=1となり成り立つ.

(iii)$n+r=k-1$をみたす(n,r)と,$n+r=k$をみたす(n,r)に対して, $P(n,r)$が成り立つと仮定して, $n+r=k+1$をみたす(n,r)に対して$P(n,r)$が成り立つことを示す$(k\geq 1)$.

$n+r=k+1$をみたす(n,r)を任意にとる. $r=k-n+1$であり, $P(n,k-n+1)$を示せばよい. また, $n=0$のときは(i)と同様に$P(n,r)$が示されるので, $n\geq 1$とする.

$n=k-n+1$のときは, 左辺=右辺=1となり, $P(n,r)$が成り立つ.

つぎに, $n\neq k-n+1$のときに, $P(n,r)$が成り立つことを示す.

$n+r=k-1$をみたす(n,r)に対して$P(n,r)$が成り立つので, $P(n-1,k-n)$が成り立つ.

つまり,

$$ {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-n+1} = \frac{(n-1)!}{(k-n+1)!\cdot(2n-k-2)!} $$

が成り立つ.

また, $n+r=k$をみたす(n,r)に対して$P(n,r)$が成り立つので, $P(n-1,k-n+1)$が成り立つ.

つまり,

$$ {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-n+1} = \frac{(n-1)!}{(k-n+1)!\cdot(2n-k-2)!} $$

が成り立つ.

よって,

$$ \begin{aligned} &{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-n+1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-n} \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-n+1)!\cdot(2n-k-2)!} + \frac{(n-1)!}{(k-n)!\cdot(2n-k-1)!} \\ &= \frac{(n-1)!\cdot(2n-k-1)}{(k-n+1)!\cdot(2n-k-1)!} + \frac{(k-n+1)\cdot(n-1)!}{(k-n+1)!\cdot(2n-k-1)!} \\ &= \frac{n!}{(k-n+1)!\cdot(2n-k-1)!} \cdots\cdots \end{aligned} $$

となる.

つぎに, 性質より,

$$ {}_{n}\mathrm{C}_{k-n+1} = {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-n+1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-n} \cdots\cdots $$

である.

, より, $P(n,k-n+1)$が示された.

以上の(i)〜(iii)より, すべてのkについて命題は示された.

おわりに

数学的帰納法には, さまざまな形式が存在するが, 本研究で比較してきた帰納法は, どれも本質的には標準的な形式の数学的帰納法と同じであることがわかった. また, 2重帰納法を用いた証明の例では, 廣瀬[1]で取りあげられていない形式を用い, 帰納法にもさまざまな形式があることを実感できた.

参考文献

[1] 廣瀬健 : シリーズ新しい応用の数学11数学的帰納法, 教育出版, 第1章〜第2章(1975).