# ゲーデルの不完全性とスマリヤンの論理パズル

2004MM050 水野辰哉
指導教員: 佐々木克巳

## 1 はじめに

スマリヤン[1]では、ゲーデルの第１不完全性定理と第２不完全性定理を数理システムや「騎士と奇人の島」の世界に適用して表現し、証明している。またロッサーに関する定理を「騎士と奇人の島」の世界に適用して表現し、証明している。本研究の目的は、その証明に必要な部分を[1]から抽出し、証明の手順を整理することで、３つの定理の証明を理解することである。以下では、関係する用語や定義を説明した後、定理の証明を記述する。

## 2 用語の説明

### 2.1 論理記号について

- $\sim$ (ではない)
- $\&$(かつ)
- $\vee$(または)
- $\supset$ (もし…ならば)
- $\equiv$ (もし…ならば、そしてそのときに限り)
- $\perp$ (矛盾する)

### 2.2 論理的閉包について

次の条件１、条件２を満たす命題の集合Cを論理的閉包という:

条件１：すべての恒真式はCに属する。

条件２：任意の命題$p$と$q$について、もし$p$と$p \supset q$がCに属するなら$q$もCに属する（三段論法について閉じている）。

### 2.3 論理的帰結について

命題XとYに対して、「YがXの論理的帰結である」ことを次のように定義する:

X⊃Yが恒真式 ⇔ YはXの論理的帰結

### 2.4 システムの定義

ここで、$Bp$は「$p$がそのシステムで証明可能である」という命題である。

**１型のシステム**

次の(1a)と(1b)を満たすシステムを１型のシステムという:

(1a)すべての恒真式が証明可能である。

(1b)任意の命題$p$､$q$に対して、$p$と$p \supset q$が証明可能ならば$q$も証明可能である。

(1b)は、論理式では以下のように表現できる。

$$(Bp \& B(p \supset q)) \supset Bq \qquad (2.1)$$

**２型のシステム**

(2.1)の形式のすべての命題が証明可能である１型のシステムを２型のシステムという。

**３型のシステム**

正常な２型のシステムを３型のシステムという。ここで、正常なシステムとは命題$p$が証明可能ならば$Bp$も証明可能であるようなシステムをいう。

正常なシステムの条件は、論理式では以下のように表現できる。

$$Bp \supset BBp \qquad (2.2)$$

**４型のシステム**

(2.2)の形式の全ての命題が証明可能である３型のシステムを４型のシステムという。

**ゲーデル的システム**

命題$p \equiv \sim Bp$がそのシステムで証明可能であるような命題$p$が少なくとも１つ存在するシステムをゲーデル的システムという。そのシステムにおいて、命題$p \equiv \sim Bp$は、「命題$p$は自分の証明不可能性と同値である」を意味する。

### 2.5 整合性

あるシステムが証明可能である全ての命題の集合に$\perp$が属さない場合、そのシステムは整合であるという。また、そうでない場合は、不整合であるという。

### 2.6 不完全性

あるシステムにおいて、ある命題$p$が証明不可能で、かつ命題$\sim p$が証明不可能であるような命題$p$が少なくとも１つ存在するとき、そのシステムは不完全であるという。また命題$p$または命題$\sim p$が証明可能であるとき、そのシステムは完全であるという。

### 2.7 安定性

あるシステムにおいて、命題$Bp$が証明可能ならば命題$p$も証明可能であるようなシステムを安定なシステムという。

## 3 ゲーデルの第１不完全性定理の証明

[1]では、ゲーデルの第１不完全性定理を証明を数理システムを用いて次のように表現している。

**定理** 任意の整合で正常で安定な１型のゲーデル的システムは、不完全でなければならない。つまり、$S$が正常な１型のシステムで$p$が$p \equiv \sim Bp$で証明可能であるような命題であるとき、$S$が整合なら$p$は$S$で証明不可能で、$S$が安定なら$\sim p$も$S$で証明不可能である。

(証明)

$p$を$p \equiv \sim Bp$が証明可能であるような命題とする（∗）。

(a)$p$がシステム$S$で証明不可能であることを証明する。

$p$がシステム$S$で証明可能と仮定する。正常(2.2)($\Leftrightarrow Bp \supset BBp$)なので、$p$が証明可能であることから、$Bp$も証明可能である。さらに１型のシステムなので、仮定と(＊) から、$\sim Bp$も証明可能($B \sim Bp$)である。システム$S$で$Bp$が証明可能($BBp$)かつ$\sim Bp$が証明可能($B \sim Bp$)であるということは不整合である。

$S$は整合なので、$p$はシステム$S$で証明不可能である。

(b)$\sim p$がシステム$S$で証明不可能であることを証明する。(＊)の$p \equiv \sim Bp$における$\equiv$の両側の否定をとると、$\sim p \equiv \sim\sim Bp$となる。したがって、$\sim p \equiv Bp$が証明可能であることを得る。

ここで$\sim p$がシステム$S$で証明可能と仮定する。１型のシステムなので、$\sim p$が証明可能($B \sim p$)ならば$Bp$が証明可能($BBp$)である。安定なシステムなので、$Bp$が証明可能($BBp$)ならば$p$が証明可能($Bp$)である。システム$S$で$\sim p$が証明可能($B \sim p$)かつ$p$が証明可能($Bp$)であり不整合となる。

$S$は整合なので、$\sim p$はシステム$S$で証明不可能である。

## 4　ゲーデルの第２不完全性定理の証明

[1]では、ゲーデルの第２不完全性定理を証明を数理システムを用いて次のように表現している。

**定理**　４型のゲーデル的システムがその整合性を証明できるならば、そのシステムは不整合となる。

この定理を証明するために以下の４つの補題を用いる。

**補題１**　３型のシステムは規則的である。ただし、規則的とは、$p \supset q$が証明可能ならば、$Bp \supset Bq$が証明可能であることである。

**補題２**　任意の２型のシステムと任意の命題$p$,$q$,$r$に関して、次が成立する。

(a) ２型のシステムで、$B(p \supset (q \supset r)) \supset (Bp \supset (Bq \supset Br))$が証明可能である。

(b) ２型のシステムで、$B(p \supset (q \supset r))$が証明可能ならば、$Bp \supset (Bq \supset Br)$も証明可能である。

**補題３**　任意の３型のシステムにおいて、$(Bp\&Bq) \supset B(p\&q)$が証明可能である。

**補題４**　任意の３型のシステムは、$(Bp\&B \sim p) \supset B\perp$が証明可能である:

上の補題を用いて、定理を証明する。

$S$を４型のゲーデル的システムとする。$S$がゲーデル的システムなので、ある$p$があって$p \equiv \sim Bp$が証明可能である。ここで次の３つが示されれば、(c)より定理が示される:

(a)$S$で$p$が証明可能ならば、$S$は不整合である。
(b)(a)が証明可能である。
(c)$S$で整合性が証明可能ならば、$S$は不整合となる。

(a)を示す。$Bp$を仮定する（＊１）。３型のシステムの条件である正常性より、$BBp$である（＊２）。 また仮定より、$p \equiv \sim Bp$が証明可能である（＊３）。（＊１）と（＊３）より$B \sim Bp$である（＊４）。（＊２）と（＊４）より不整合となる。

(b)を示す。仮定より、$p \equiv \sim Bp$が証明可能である。$p \equiv \sim Bp$の論理的帰結より、$p \supset \sim Bp$が証明可能である。補題１より、３型のシステムは規則的なので、$Bp \supset B \sim Bp$が証明可能である（＊５）。４型のシステムの条件より、$Bp \supset BBp$が証明可能である（＊６）。（＊５）と（＊６）より、$Bp \supset (BBp\&B \sim Bp)$が証明可能である（＊７）。補題４より、$(BBp\&B \sim Bp) \supset B\perp$が証明可能である（＊８）。（＊７）と（＊８）から三段論法より、$Bp \supset B\perp$が証明可能である。

(c)を示す。(b)より、$Bp \supset B\perp$が証明可能である。$Bp \supset B\perp$が証明可能であるので、対偶の性質を使うと、$\sim B\perp \supset \sim Bp$が証明可能である（＊９）。$B \sim B\perp$を仮定する（$\Leftrightarrow$ 整合性が証明可能であることを仮定する）（＊１０）。（＊９）と（＊１０）から１型のシステムの条件(1b)より、$B \sim Bp$である（＊１１）。 仮定の論理的帰結より、$\sim Bp \supset p$が証明可能である（＊１２）。（＊１１）と（＊１２）から１型のシステム(1b)より、$Bp$である。 (a)より、不整合である。

## 5　「騎士と奇人の島」の世界

３節と４節で述べたことは、以下のように「騎士と奇人の島」の世界のことばに置き換えて述べることもできる。この世界では、「システム」を「推論者」、「証明可能」を「信じる」と置き換え、2.4節で述べたことを同様に定義する。そして以下の３つの条件を満たすとする:

(1)騎士は本当の事しか言わない。
(2)奇人は間違ったことしか言わない。
(3)すべての住人は騎士か奇人のどちらかである。

## 6　ロッサーに関する定理

５節で述べてきた「騎士と奇人の島」の世界に$Bp < Bq$(推論者が$q$を信じる前に$p$を信じる)という命題を加え、以下で定義するロッサー型の推論者を考える。

**ロッサー型の推論者**

任意の命題$p$と$q$について、もし推論者が$p$を信じ、まだ$q$を信じていないならば、遅かれ早かれ$Bp < Bq$かつ$\sim(Bq < Bp)$を信じる１型の推論者をロッサー型の推論者という。

**ロッサーに関する定理**　島の規則を信じているロッサー型の推論者がその島を訪れた。彼は、次のように自分に話かける住人に出会った。住人は「あなたは私が奇人であると信じる前に、私が騎士であると信じることはないでしょう」と発言した。もしその推論者が整合ならば、彼はその住人が騎士であるか奇人であるか永遠に決められない。

## 参考文献

[1] レイモンド・スマリヤン著：長尾確、田中朋之訳: 決定不能の論理パズル　ゲーデルの定理と様相論理、白揚社(1990).