

# スライディングモード制御による磁気浮上装置のロバスト安定化

2004MM045 丸山 数人

指導教員 高見 勲

## 1 はじめに

スライディングモード制御はエンジン噴射制御に実用化されており、また適用範囲も広い制御手法である。本研究ではこのスライディングモード制御の一般周波数成形に関する線形制御を示す。

## 2 制御対象

### 2.1 モデル化

磁気浮上装置のモデリングを行う(図1)。磁気浮上装置はコイルに電圧をかけることによって磁石を浮上させるものである。これにはコイルの磁力、磁石の重力、ガラスロッドの摩擦力という作用する力がある。磁石にコイルが及ぼす力を $F$ [N]、コイルから磁石までの距離を $y$ [m]、磁石の質量を $m$ [kg]、重力加速度を $g$ [m/s<sup>2</sup>]、磁石とガラスロッドの間にかかる動摩擦係数を $c$ [kg/s]とする。この時、運動方程式は下式となる。

$$m\ddot{y} = -F - c\dot{y} + mg \quad (1)$$

ここで $F$ は下式で表わされ( $a, b$ は定数)、 $u$ はコイルに印加される電圧[V]である。

$$F = \frac{u}{a(y+b)^4} \quad (2)$$

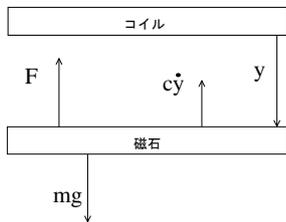


図 1: 磁気浮上装置のモデル

### 2.2 線形化

2.1節の $F$ をテーラー展開によって線形化し、状態方程式を求めると下式を導き出せる。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k_1 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k_2 \end{bmatrix} u^* \quad (3)$$

ここで $x_1 = y^*$ 、 $y^* = y - y_0$ 、 $\dot{x}_1 = \dot{y} = \dot{x}_2$ 、 $u^* = u - u_0$ 、 $k_1 = \frac{4u_0}{ma(y_0+b)^5}$ 、 $k_2 = -\frac{1}{ma(y_0+b)^4}$ 、 $k_3 = -\frac{c}{m}$ である。 $y_0, u_0$ は平衡点でのコイルの位置と電圧の値である。

## 3 スライディングモード制御

スライディングモード制御は

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ \sigma = Sx \end{cases} \quad (4)$$

のように表される。 $\sigma$ が切換面である。またスライディングモードの概念図を図2に示す。

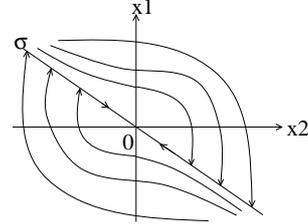


図 2: スライディングモードの概念図

図2に示すように状態変数を切換面に到達させ、その後切換面上を原点に向かってスライドさせる。

### 3.1 切換超平面の設計

スライディングモード制御を設計するにはまず切換超平面を設計する。本研究では切換面の設計を一般周波数成形を用いて行う。この周波数成形による設計法は数学モデルで無視された高周波領域への制御の影響を極力抑える、いわゆるスピルオーバー抑制形の切換面の設計方法である[1]。そこで切換面を以下に示す。

$$\psi = S_1(x_1) + x_2 \quad (5)$$

この切換面はダイナミクスを持っており、 $S_1(\cdot)$ はあるダイナミクスを有する線形オペレータである。この $S_1(\cdot)$ は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{z} &= Fz + Gx_1 \\ S_1(x_1) &= Hz + Lx_1 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

(6)式を(3)式に合成した拡大システムは以下ようになる。ここで、 $A_{11} = 0, A_{12} = 1, A_{21} = k_1, A_{22} = k_3, B_2 = k_2$ 、 $x = [z \ x_1 \ x_2]^T$ とする。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} F & G & 0 \\ 0 & A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_2 \end{bmatrix} u \quad (7)$$

$$\psi = [H \ L \ 1]x \quad (8)$$

スライディングモードが生じるとき、 $\psi = \dot{\psi} = 0$ によって、切換面上での制御入力は以下ようになる。

$$u_{eq} = -B_2^{-1} \left\{ (HF - LA_{12}H - A_{22}H)z + (HG + LA_{11} + A_{21} - LA_{12}L - A_{22})x_1 \right\} \quad (9)$$

これは等価制御入力と呼ばれる。(9)式を拡大システムに代入した場合、切換面上で低次元化された次の方程式が得られる。

$$\begin{cases} \dot{z} = Fz + Gx_1 \\ \dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}(-Hz - Lx_1) \end{cases} \quad (10)$$

また、(6) 式のダイナミクスは、通常の切換面の中に状態空間を拡大して、新たにフィルタが挿入されたことを意味する。このフィルタの伝達関数は以下ようになる。

$$R(s) = L + H(sI - F)^{-1}G \quad (11)$$

このフィルタが望ましい特性を持ち、かつシステムが安定となるようにフィルタのパラメータを決定すれば切換面が唯一に決定される。本研究ではこれら(10)式と(11)式を用い、極を指定して切換面の設計を行った。(10)式をまとめると下式となる。

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & G \\ -A_{12}H & A_{11} - A_{12}L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ x \end{bmatrix} \quad (12)$$

指定したい極を  $(p) \pm j(q)$  とし、(12)式に対して極を求めると以下のような関係が得られる。

$$\left. \begin{aligned} F - L &= -2p \\ -FL + GH &= p^2 + q^2 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

また、システムの極とフィルタの極には以下に示すような関係にする必要がある。何故ならばフィルタの極である  $F$  がシステムの支配極よりも複素平面上で右側にある場合、システム全体の応答を遅らせてしまうからである。また(11)式より  $s = j\omega$  として  $\omega$  を無限大に大きくした場合  $H(sI - F)^{-1}G \cong 0$  となるため  $L$  を  $10[\text{rad/sec}]$  で高周波をカットするように選べばフィルタの役目を果たす。これらの条件と(13)式の関係を満たすように  $F, G, H, L$  を決定することによって切換面の設計を行った。

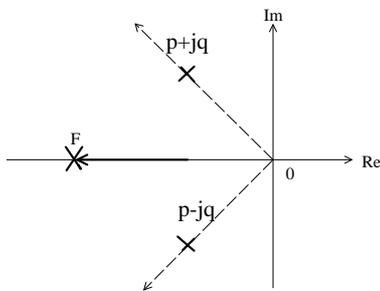


図 3: 支配極とフィルタの極の関係

### 3.2 スライディングモードコントローラの設計

スライディングモード制御入力  $u$  は線形フィードバック制御項  $u_l$  と非線形制御項  $u_{nl}$  の 2 つの独立した項から構成されていると考えることができる。またこのような設計方法は最終スライディングモード制御法[1]と呼ばれている。

$$u = -F_u x - k \frac{\sigma}{\|\sigma\| + \eta} \quad (14)$$

(14)式において  $F_u = (SB)^{-1}SA$  である。また、 $SB > 0$  のとき  $k > 0$ 、 $SB < 0$  のとき  $k < 0$  と選べば安定なスライディングモード制御を実現できる。このコントローラはチャタリング抑止の効果のある平滑関数を用いている。

## 4 シミュレーションと実験

シミュレーションでは、初期値  $z = 0, x_1 = 0.02, x_2 = 0$ 、とし、他のパラメータは  $F = -27.9, G = 27.9, H = 7.36, L = 0.1, k = -10, \eta = 0.15$  とし、また人が磁石に軽く触れたという設定でパルス外乱を入れシミュレーションと実験を行った。右側がシミュレーション結果であり左側が実験結果である。

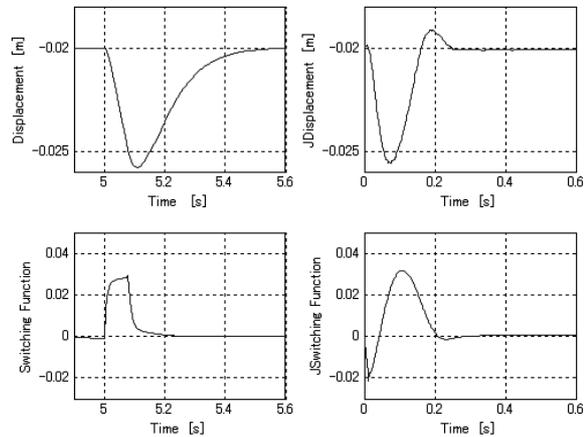


図 4: シミュレーションと実験結果

## 5 考察

シミュレーションと実験両方で外乱を入れても制御することができている。また平衡点までの収束はシミュレーションと実験を比べると実験のほうがより早く収束している。しかしながら、0.2秒付近でシミュレーションでは見られないオーバーシュートが起こっている。また切換関数は両方とも0に向かって収束しており、スライディングモードが生じていることがわかる。

## 6 終わりに

本研究で得られた成果は次の通りである。一般周波数成形におけるフィルタのパラメータ決定において、極配置による決定法の方程式を導出することに成功した。またこの理論を適用し、実験によって目標値追従性、パラメータ変動に対する強さ、他の理論と比較して容易に適用できる特性などを検証することができた。

## 参考文献

- [1] 野波健蔵, 田宏奇: スライディングモード制御, コロナ社 (1994).
- [2] 松浦達郎, 鈴木宏和: エネルギー制御とスライディングモード制御による倒立振子の振り上げと安定化 - 線形と非線形によるアプローチ -, 南山大学数理情報学部数理科学科卒業論文 (2005)
- [3] 大迫佑磨:  $H_\infty$  制御による磁気浮上システムの安定化, 南山大学数理情報学部数理科学科卒業論文 (2006)