自然数論の無矛盾性の証明

2004MM043 前田 健策
指導教員: 佐々木克巳

1 はじめに

松本[1]では、数理論理学の著しい応用の一例として、自然数論の体系が無矛盾であることを証明している。本研究の目的は、この証明を理解することである。この証明は松本[1]に従い行うが、証明にあらわれるVJ-変形と準備的な変形に対する記述において説明を補足した。

2 自然数論の公理体系

自然数論という数学理論を形式化するために、言語・式と、体系LKを松本[1]と同様に定義する。体系GはLKに数学的始式と推論規則VJを加えた体系として定義する。このGが本稿で扱う自然数論の体系である。

推論規則VJを以下に挙げる。

・Vollstanding Induktion(VJ)

$$\frac{F(a), \Gamma \to \Theta, F(a')}{F(0), \Gamma \to \Theta, F(t)}$$

ただしaは$F(0)$、Γ、Θに現れない

これは数学的帰納法の公理を推論の形で形式化したものである。ここで、論理式$F(0)$の論理記号の数をこのVJ推論規則のgradeとよぶ。gradeとは、推論規則に含まれる論理記号の数である。

また、数学的始式は素論理式(部分論理式を持たない論理式)からなる数学的に真な式である。

3 自然数論の無矛盾性の証明

3.1 自然数論の無矛盾性の証明の道筋

体系Gが無矛盾であるとは、Gのどんな証明図も終式として$\to$を持たないことであると定義する。無矛盾性の証明において、まず$\to$を終式とする任意の証明図を考える。この証明図に対し、次の操作を行う。

1. 順序数を定義し、証明図へ対応させる。
2. 証明図の変形の方法を述べる。
3. 2の操作によって順序数が減少することを述べる。
4. 証明図の変形ができない場合に不合理が得られることを示す。

以上のことから、自然数論が無矛盾であることが導かれる。

3.2 順序数の証明図への対応

有限の立場で超限順序数の集合G_nを帰納的に定義する。

1. G_0は数字0だけからなる集合である。$0=0$は成り立つ。また$0<0$ は成り立たないと定義する。
2. 次に集合G_n(nは数字または0とする)が定義され、G_nの元について$=$ および$<$がすでに定義されていると仮定する。このとき集合G_{n+1}を次のように定義する。G_{n+1}の元は$\omega^{\alpha_1}+\omega^{\alpha_2}+\cdots+\omega^{\alpha_\nu}$ の形の順序数である。ただし$\alpha_i \in G_n$とし、$\alpha_1 \geq \alpha_2 \cdots \geq \alpha_\nu$($\nu$は任意の数字)を満たすとする。また数字0は集合$G_{n+1}$に属するものとする。$=,<$に関しては次のように定義する。$G_{n+1}$の二つの元を$\beta,\gamma$とし、

$$\begin{aligned}&\beta=\omega^{\beta_1}+\omega^{\beta_2}+\cdots+\omega^{\beta_\mu}\\&\gamma=\omega^{\gamma_1}+\omega^{\gamma_2}+\cdots+\omega^{\beta_\nu} \qquad \beta_i,\gamma_j \in G_n\end{aligned}$$

とするとき、

$$\begin{aligned}&\beta=\gamma \iff \mu=\nu\text{かつ}\beta_i=\gamma_i(i=1,2,\cdots,\mu)\\&\beta<\gamma \iff (\beta_1<\gamma_1)\\&\text{もしくは}(\beta_i=\gamma_i\text{かつ}\beta_{i+1}<\gamma_{i+1}(i=1,2,\cdots))\\&\text{もしくは}(\mu<\nu\text{かつ}\beta_i=\gamma_i(i=1,2,\cdots,\mu))\end{aligned}$$

とする。ただし$\beta<\gamma$は$\gamma>\beta$と同じであると定める。またとくに数字0は任意の0でない順序数より小であると定める。

この順序数を証明図へ対応させるために、証明図中の式の高さを定義する。証明図中の式Sの高さとは、証明図の中で式Sより下に現れるcut またはVJ-推論規則のgradeの最大値をいう。またこのようなcutもVJ-推論規則もないとき、式Sの高さは0であると定義する。

証明図に対応する順序数を定義する。まず一番上の式より始め、証明図に現れる各式および推論の横線に順序数を次のように定める。

1. 始式には順序数1(すなわちω^0)を対応させる。
2. 推論規則の上式に順序数が対応しているとき、この推論の横線には次の順序数を対応させる。すなわち、推論規則が、
   (a) 構造に関する推論規則のとき、この推論の横線には上式と同じ順序数を対応させる。
   (b) cutのとき、左、右の上式にそれぞれ順序数αおよびβが対応しているならば、cutの横線には自然和$\alpha\sharp\beta$を対応させる。
   (c) 論理記号に関する推論規則のとき、上式が一つの場合これに順序数αが対応していれば、この推論の横線には$\alpha+1$を対応させる。また、上式が二つの場合、上式に対応するそれぞれの順序数の大きい方(等しい場合も含めて)をαとすれば、この推論の横線には$\alpha+1$を対応させる。
   (d) VJ-推論規則のとき、上式に順序数$\omega^{\alpha_1}+\cdots+\omega^{\alpha_\nu}(\nu\geq 1, \alpha_1\geq\cdots\geq\alpha_\nu)$が対応しているならば、この推論の横線には$\omega^{\alpha_1+1}$を対応させる($\alpha_1=0$のときは$\omega^1$を意味するものとする)。
3. 推論の横線に対し、上に述べた推論規則への順序数の対応づけによって、すでに順序数αが対応しているとき、この推論規則の下式には次の順序数が対応す

る。すなわち、上式の高さをρとしたとき、下式の高さを $\rho-n(n\geq 0)$とすれば、下式には順序数

$$\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\alpha}}}}}$$

を対応させる(ωの個数はn個)。

3.3 証明図の変形

次の4つの変形を考える。

(a) eigenvariableとして用いられていない自由変数はすべて0で置き換える。また、$(\rightarrow\forall)$,$(\exists\rightarrow)$およびVJ-推論規則のeigenvariableである自由変数はすべて異なるように置き換える。

(b) VJ推論規則の下式のtが数字nのときに、この推論規則を$n-1$個のcutの列を用いて置き換える(VJ-変形)。例えばt=3のとき、VJ推論規則は、

$$\frac{F(a)\rightarrow F(a')}{F(0)\rightarrow F(3)}$$

であるが、2つのcutを用いて置き換えると、

$$\frac{\dfrac{F(0)\rightarrow F(1)\quad F(1)\rightarrow F(2)}{F(0)\rightarrow F(2)}\qquad F(2)\rightarrow F(3)}{F(0)\rightarrow F(3)}$$

となる。

(c) 全ての$(\rightarrow w)$,$(w\rightarrow)$と全ての論理的始式を除去するための変形。

(d) 論理記号に関する推論規則を除去するための変形。

3.4 変形における順序数の変化

ここでは、3.3節の操作をある順序で繰り返すことにより、証明図に対応させた順序数が減少してゆくことを示す。また、順序数の集合 $\{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\cdots\}$ が$\alpha_0>\alpha_1>\alpha_2>\cdots$を満足するとき、集合$\alpha_\nu$は有限集合である。したがって、その順序での変形の操作が有限回で終了する。

具体的な操作の順序は、3.3節の(a)〜(d)を二つに分けて次のように行う。

1. 終式部分にVJ-推論規則がある場合、(a)の後に(b)を行う。
2. 終式部分にVJ-推論規則がなく、証明図の中に論理記号に関する推論規則がある場合、(c)を行い(d)を行う。

各場合における順序数の変化は以下のとおりである。1の場合では(a)によって順序数は変わらず、(b)によって順序数は減少する。2の場合では(c)によって順序数は増加せず、(d)によって順序数が減少する。したがって、1と2のいずれの場合にも変形によって得られる証明図の順序数は減少することが示される。以下では松本[1]における、(b),(c)についての証明を捕捉する。

(b)では$t=1$の場合を補足する。$t=1$の場合、変形後の上式に対応する順序数は、変形前と同様に$\omega^{\alpha_1}+\cdots+\omega^{\alpha_\nu}$である。VJ-変形の後に、cutを用いずに構造に関する推論規則で構成されるので、変形後の上式と下式の高さは変形前と変わらずρである。よって、下式に対応する順序数は上式と同じ$\omega^{\alpha_1}+\cdots+\omega^{\alpha_\nu}$であるので、$\omega^{\alpha_1+1}$より小さくなる。

(c)について補足する。この変形において、順序数が増加しないことの証明には、次の(命題2)が用いられる。

(命題2) 集合E_kに属する式Sの変形前および変形後の順序数をそれぞれβおよびβ'とすれば、次の不等式が成り立つ

$$\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\beta}}}}}\geq\beta'(\omega\text{の個数は}\rho-\epsilon_k\text{個})$$

この(命題2)の証明は、Sを下式とする推論規則の種類で場合分けして行う。本研究ではSが論理記号に関する推論規則Iの下式であり、Iの上式が一つである場合の説明を補足した。以下で現れる

$$\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\beta}}}}}$$

の点線のωの個数は、$\rho-\epsilon_k$とする。

Sが論理記号に関する推論規則Iの下式であるとする。Iの上式が一つのとき、上式の変形前後の順序数γ,γ' について仮定の不等式が成り立つとし、下式Iの順序数$\beta(=\gamma+1),\beta'(=\gamma'+1)$について成り立つことを示せばよいが

$$\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\beta}}}}}>\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\gamma}}}}}\geq\gamma'\text{および}\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\beta}}}}}>1$$

である。ここで、

$$\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\beta}}}}}=X$$

とおく。このXとγ'は、順序数なので、

$$X=\omega^{X_0}+\omega^{X_1}+\cdots+\omega^{X_\xi}$$
$$\gamma'=\omega^{\gamma'_0}+\omega^{\gamma'_1}+\cdots+\omega^{\gamma'_\zeta}\qquad(X_\xi,\gamma_\zeta\in G_n)$$

とおくことができる。いま$X>\gamma'$であり、これは順序数の定義より、

$$X_1>\gamma'_1$$

もしくは

$$X_i=\gamma'_i\text{かつ}X_{i+1}>\gamma'_{i+1}$$

もしくはXの順序数の列がγ'の列よりも長い場合($\xi>\zeta$かつ$X_i=\gamma_i(i=1,2,\cdots,\xi)$) である。いずれの場合においても$\omega^0=1$を$\gamma'$に加えても、定義より$X>\gamma'+1$となる。よって、

$$\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\beta}}}}}>\gamma'+1=\beta'$$

を得る。

3.5 変形できない証明図

変形できない証明図は、$\rightarrow$を数学的始式から構造に関する推論規則からのみ導く証明図になり、真な式から偽な式を導くこととなり不合理である。これにより、体系Gの無矛盾性の証明が終了する。

参考文献

[1] 松本和夫：復刊 数理論理学, 共立出版(2001).