論理関数の完全系

2004MM034 金田宗之
指導教員: 佐々木克巳

1　はじめに

本研究では、城戸[1]、細井[2]でとりあげられている論理関数について研究を進め、特に２変数論理関数の完全系について深く理解することを目的とする。

まず、論理関数の基礎的な知識、否定・論理積・論理和の性質を述べる。つぎに２変数論理関数を説明して全て列挙する。そこで使われている関数についても説明する。さらに完全系について述べ、完全系を全て示し証明していく。そのあとで完全系でない組み合わせを見つける。

本研究は、完全系の証明までは、[1],[2]にしたがったが、完全系でない組み合わせを見つける部分は、独自の方法で行った。

2　論理関数の基礎的な知識

2.1　真理値

すべて真か偽かのどちらか明確に主張できる文のことを命題という。その命題が真ならば１、偽ならば0と表す。この1と0とを命題の真理値という。

2.2　論理変数、論理関数

命題とその関数である命題の真理値を表す変数を論理変数といい、論理変数の関数を論理関数という。

2.3　真理値表

論理変数の真理値とそれによって決められた論理関数の真理値との関係を記述する表を、真理値表という。下記の表1は否定・論理積・論理和の真理値表であり、否定・論理積・論理和を以下のように定義する。

表 1: 否定、論理積、論理和の真理値表

$A\ B$	否定 $\bar{A}$	否定 $\bar{B}$	論理積 $A \cdot B$	論理和 $A + B$
0 0	1	1	0	0
0 1	1	0	0	1
1 0	0	1	0	1
1 1	0	0	1	1

3　2変数論理関数

2変数論理関数とは、2つの論理変数を用いて定義できる論理関数である。論理変数は0か1かの2値のどちらかをとるから、2変数A, Bの値の組み合わせは4通りになり,4通りの各組み合わせに対して、関数の値が0か1かのどちらかになることからA, Bの論理関数は表2に示すように16通りが存在する。

表 2: 2変数論理関数のすべて

A B	1100 1010	関数(演算)名	他の論理記号 による表現	否定,積,和 による表現
F_0	0000	定数0		$0 = A \cdot A$
F_1	0001	二重縦棒,NOR	$A \parallel B,\ A \downarrow B$	$\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$
F_2	0010	禁止ゲート	$B - A$	$\bar{A} \cdot B$
F_3	0011	否定,NOT		$\bar{A}$
F_4	0100	禁止ゲート	$A - B$	$A \cdot \bar{B}$
F_5	0101	否定,NOT		$\bar{B}$
F_6	0110	排他的論理和	$A \oplus B$	$A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$
F_7	0111	Shaferの縦棒,NAND	$A \mid B$	$\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$
F_8	1000	論理積,AND		$A \cdot B$
F_9	1001	対等	$A \rightleftharpoons B$	$A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B}$
F_{10}	1010			B
F_{11}	1011	含意	$A \to B$	$\bar{A} + B$
F_{12}	1100			A
F_{13}	1101	含意	$B \to A$	$A + \bar{B}$
F_{14}	1110	論理和,OR		$A + B$
F_{15}	1111	定数1		$1 = A + \bar{A}$

4　完全系

16通りすべての2変数論理関数は否定、論理積、論理和で表現できる。したがって、この3種の関数を他の関数によって実行ことができれば、その関数により、あらゆる論理関数が実現できることになる。

ところが、否定、論理積、論理和の3種の関数がそろわなくてもよい。

それがあれば全ての論理関数を実現することができる関数を、素演算という。しかし、１種の演算ではなく何種類かの演算の組み合わせでそれが可能になる場合が多いので、そのことも含めて、その関数の組を完全系という。また、必要最小限の関数の組での完全系を極小完全系という

表3は[1],[2]に書かれているものを私なりに変えたものである。どの完全系も表3のいずれかの完全系を含んでいる。また、その各完全系における否定、論理積、論理和の表現も列挙した。

5　極大不完全系

前節で完全系の組み合わせを列挙した。ある関数の組み合わせによって、完全系は成り立つ。逆にどんなに多く関数を用いたとしても完全系の組み合わせに当てはまらない組み合わせもある。この組み合わせを不完全系であるという。不完全な組み合わせはそれらだけでは否定・論理積・論理和が表現できないという性質をもつ。このとき、できる限り多くの関数を用いた不完全の組を極大不完全系という。

5.1　極大不完全系を探す手順

極大不完全系を求めるために、表3で全て極小完全系を列挙したという仮定のもと、しらみつぶしに探す。具体的には次の(1),(2)のように行う

(1)扱う関数の種類の制限

2変数論理関数は16通りあるが、そのうち表2よりF_2とF_4, F_3とF_5, F_{11}とF_{13}の3組は同じ関数同士なので扱う関数は13通りに減る。また、F_{10}とF_{12}は成り立つ上で行うのでさらに11通りに減る。さらにNORと$NAND$はそれだけで完全系になるのでさらに減る。よって扱う関数は否定、含意禁止ゲート、定数0、定数1、論理積、論理和、対等、排他的論理和の9通りである。

(2)関数の固定

関数を一つ固定して選び、その関数と組み合わさると完全系になってしまうものを一つずつ抜いていく。組み合わすと完全系になる関数を全部抜いて出た組み合わせをさらに完全系と比較して、完全系にならないと断定して、極大不完全系を見つける。見つけたら、固定した関数を抜いて、別の関数をまた固定して同様なことを繰り返す。

5.2 結果

5.1節で述べた手順で極大不完全系の組み合わせ探した結果、極大不完全系の組み合わせは
1.(否定,定数0,定数1,対等,排他的論理和)
2.(含意,定数1,論理積,論理和,対等)
3.(禁止ゲート,定数0,論理積,論理和,排他的論理和)
4.(定数0,定数1,論理積,論理和)
の4通りだけであることがわかった。以下に、手順(2)の詳細を述べる。

まず、否定を固定することにより

1.(否定,定数0,定数1,対等,排他的論理和)

が見つかる。次に、否定を除き、含意を固定することにより

2.(含意,定数1,論理積,論理和,対等)

が見つかる。さらに、含意を除き、禁止ゲートを固定することにより

3.(禁止ゲート,定数0,論理積,論理和,排他的論理和)

が見つかる。最後に、禁止ゲートを除き、定数0を固定することにより

4.(定数0,定数1,論理積,論理和)

が見つかる。

以下残りの関数を固定していっても極大不完全系は見つからない。

6 終わりに

本研究をまとめると，極小完全系17通りに対して極大不完全系4通りという結果は意外であった。ランダムに関数を選んだ場合、ほとんどが完全系になることがわかった。しかし，極小完全系が表3に列挙したもので全てである証明をしなかったこと、また探した極大不完全系が本当に完全系にならないかという証明ができなかったことが心残りである。

参考文献

[1] 城戸健一：論理回路, 森北出版株式会社 (2001).

[2] 細井　勉：情報科学のための論理数学，日本評論社 (1992).

表 3: 論理演算における完全系

番号	完全系	否定	論理積	論理和
1	NOR	$A \| A$	$(A \parallel A) \parallel (B \parallel B)$	$(A \parallel B) \parallel (A \parallel B)$
2	$NAND$	$A \mid A$	$(A \mid B) \mid (A \mid B)$	$(A \mid A) \mid (B \mid B)$
3	否定,論理積	$\bar{A}$	$A \cdot B$	$\overline{\bar{A} \cdot \bar{B}}$
4	否定,論理和	$\bar{A}$	$\overline{\bar{A} + \bar{B}}$	$A + B$
5	否定,含意	$\bar{A}$	$\overline{A \to \bar{B}}$	$\bar{A} \to B$
			$\overline{B \to \bar{A}}$	$\bar{B} \to A$
6	0,含意	$A \to 0$	$(A \to (B \to 0)) \to 0$	$(A \to 0) \to B$
7	否定,禁止ゲート	$\bar{A}$	$B - \bar{A}$	$\overline{\bar{A} - B}$
			$A - \bar{B}$	$\overline{\bar{B} - A}$
8	1,禁止ゲート	$1 - A$	$A - (1 - B)$	$1 - ((1 - A) - B)$
			$B - (1 - A)$	$1 - ((1 - B) - A)$
9	排他和,含意	$A \to (A \oplus A)$	$(A \to (B \to (A \oplus A))) \to (A \oplus A)$	$(A \to (A \oplus A)) \to B$
10	対等,禁止ゲート	$(A \rightleftharpoons A) - A$	$A - ((A \rightleftharpoons A) - B)$	$(A \rightleftharpoons A) - (((A \rightleftharpoons A) - A) - B)$
			$B - ((A \rightleftharpoons A) - A)$	$(A \rightleftharpoons A) - (((A \rightleftharpoons A) - B) - A)$
11	含意,禁止ゲート	$(A \to A) - A$	$A - ((A \to A) - B)$	$(A \to A) - (((A \to A) - A) - B)$
			$B - ((A \to A) - A)$	$(A \to A) - (((A \to A) - B) - A)$
		$A \to (A - A)$	$(A \to (B \to (A - A))) \to (A - A)$	$(A \to (A - A)) \to B$
12	0,対等,積	$A \rightleftharpoons 0$	$A \cdot B$	$(A \rightleftharpoons B) \rightleftharpoons (A \cdot B)$
13	0,対等,和	$A \rightleftharpoons 0$	$(A \rightleftharpoons B) \rightleftharpoons (A + B)$	$A + B$
14	1,排他和,積	$1 \oplus A$	$A \cdot B$	$A \oplus B \oplus A \cdot B$
15	1,排他和,和	$1 \oplus A$	$A \oplus B \oplus (A + B)$	$A + B$
16	排他和,対等,積	$A \rightleftharpoons (A \oplus A)$	$A \cdot B$	$(A \rightleftharpoons B) \rightleftharpoons (A \cdot B)$
		$(A \rightleftharpoons A) \oplus A$	$A \cdot B$	$A \oplus B \oplus A \cdot B$
17	排他和,対等,和	$A \rightleftharpoons (A \oplus A)$	$(A \rightleftharpoons B) \rightleftharpoons (A + B)$	$A + B$
		$(A \rightleftharpoons A) \oplus A$	$A \oplus B \oplus (A + B)$	$A + B$