駅の切符売り場における待ち行列

2004MM029 岩村 勇哉
指導教員: 澤木 勝茂

1 はじめに

本研究では駅の切符売り場における待ち行列を考える．駅で乗車券や特急券などを購入する場合，切符売り場の窓口に並び，順番が回ってきたら行き先や希望の座席の種類を伝えて切符を購入する．また，駅員もコンピュータで空席状況を調べたり，時刻表の確認などをおこなうので，切符売り場では待ち行列が発生する．そこで，少しでも待ち時間を減らすためには，どのような待ち行列にすれば効率が良いのかを4つのモデルを設定して検討する．なお顧客は平均到着率 λ のポアソン到着，平均サービス率 μ の指数サービス時間であると仮定する．

2 記号の説明

λ：平均到着率
μ：平均サービス率
L：系内にいる平均顧客数
L_q：待っている顧客の平均数
W：平均滞在時間
W_q：平均待ち時間

3 モデル1：窓口毎に並ぶ場合

窓口が6つ並列に並んでいて，すべての窓口がサービス中のとき，到着した顧客は1番短い列に並ぶとする．1番短い列が2つ以上ある場合は，その中からいずれかの列を等しい確率で選ぶとする．また空いている窓口があるとき，到着した顧客はそのいずれかの窓口を等しい確率で選ぶとする．

3.1 モデルの定式化

それぞれの窓口にいる平均顧客数，平均滞在時間は，

$$L = \frac{\lambda}{6\mu - \lambda}, \quad W = \frac{6}{6\mu - \lambda}$$

待っている顧客の平均数，平均待ち時間は，

$$L_q = \frac{\lambda^2}{6\mu(6\mu - \lambda)}, \quad W_q = \frac{\lambda}{\mu(6\mu - \lambda)}$$

となる．

3.2 考察

到着率が増加すると，顧客の平均数，平均待ち時間が大きくなる．よって顧客の平均到着率が大きくなると顧客の流れが悪くなる．

4 モデル2：1列に並ぶ場合

窓口が6つ並列に並んでいて，すべての窓口がサービス中のとき，到着した顧客は1列に並ぶとする．空いている窓口があるとき，到着した顧客はそのいずれかの窓口を等しい確率で選ぶとする．

4.1 モデルの定式化

$$a = \frac{\lambda}{\mu}, \quad P_0 = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{5} \frac{a^n}{n!} + \frac{a^6}{120(6-a)}}$$

とおくと，それぞれの窓口にいる平均顧客数，平均滞在時間は，

$$L = a + \frac{a^7}{120(6-a)^2} P_0, \quad W = \frac{a}{\lambda} + \frac{a^7}{120\lambda(6-a)^2} P_0$$

待っている顧客の平均数，平均待ち時間は，

$$L_q = \frac{a^7}{120(6-a)^2} P_0, \quad W_q = \frac{a^7}{120\lambda(6-a)^2} P_0$$

となる．

4.2 考察

到着率を大きくすると，待っている顧客の平均数，平均待ち時間の増加の幅がモデル1より小さく，安定している．そのためモデル1より待ち時間が小さい．また，待ち行列が1つなので，すべての顧客の待ち時間は平等になる．

5 モデル3：2列に並ぶ場合

窓口が6つ並列に並んでいて，顧客は3つの窓口に対して1つの列をつくるとする．すべての窓口がサービス中のとき，到着した顧客は短い方の列に並び，列の長さが等しい場合は，いずれかの列を等しい確率で選ぶとする．

5.1 モデルの定式化

$$a = \frac{\lambda}{2\mu}, \quad P_0 = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{2} \frac{a^n}{n!} + \frac{a^3}{2(3-a)}}$$

とおくと，それぞれの窓口にいる平均顧客数，平均滞在時間は，

$$L = a + \frac{a^4}{2(3-a)^2} P_0, \quad W = \frac{2a}{\lambda} + \frac{a^4}{\lambda(3-a)^2} P_0$$

待っている顧客の平均数，平均待ち時間は，

$$L_q = \frac{a^4}{2(3-a)^2} P_0, \quad W_q = \frac{a^4}{\lambda(3-a)^2} P_0$$

となる．

5.2 考察

モデル1，モデル2と同様に到着率を大きくすると，待っている顧客の平均数，平均待ち時間が増加し，顧客の流れが悪くなる．

6 モデル4：3列に並ぶ場合

窓口が6つ並列に並んでいて，顧客は2つの窓口に対して1つの列をつくるとする．すべての窓口がサービス中のとき，到着した顧客は1番短い列に並び，列の長さが等しい場合は，いずれかの列を等しい確率で選ぶとする．

6.1 モデルの定式化

$$a = \frac{\lambda}{3\mu}, \quad P_0 = \frac{2-a}{2+a}$$

とおくと，それぞれの窓口にいる平均顧客数，平均滞在時間は，

$$L = a + \frac{a^3}{(2-a)^2}P_0, \quad W = \frac{3a}{\lambda} + \frac{3a^3}{\lambda(2-a)^2}P_0$$

待っている顧客の平均数，平均待ち時間は，

$$L_q = \frac{a^3}{(2-a)^2}P_0, \quad W_q = \frac{3a^3}{\lambda(2-a)^2}P_0$$

となる．

6.2 考察

モデル1，モデル2，モデル3と同様に到着率を大きくすると，待っている顧客の平均数，平均待ち時間が増加し，顧客の流れが悪くなる．増加の幅はモデル1より小さく，モデル2，モデル3より大きい．

7 モデルの比較

7.1 表による比較

モデル1，モデル2，モデル3，モデル4の顧客の到着率や平均サービス率の変化に対して待っている顧客の平均数，平均待ち時間がどのように推移していくか考察していく．

表 1: 窓口がすいているとき($\lambda = 6.0$，$\mu = 2.0$とする)

モデル1	モデル2	モデル3	モデル4
6列に並ぶ	1列に並ぶ	2列に並ぶ	3列に並ぶ
$M/M/1$	$M/M/6$	$M/M/3$	$M/M/2$
$L_q = 0.50$	$L_q = 0.099$	$L_q = 0.236$	$L_q = 0.333$
$W_q = 0.50$	$W_q = 0.017$	$W_q = 0.079$	$W_q = 0.167$

表 2: 窓口が落ち着いているとき($\lambda = 7.0$，$\mu = 2.0$とする)

モデル1	モデル2	モデル3	モデル4
6列に並ぶ	1列に並ぶ	2列に並ぶ	3列に並ぶ
$M/M/1$	$M/M/6$	$M/M/3$	$M/M/2$
$L_q = 0.816$	$L_q = 0.249$	$L_q = 0.468$	$L_q = 0.604$
$W_q = 0.70$	$W_q = 0.041$	$W_q = 0.134$	$W_q = 0.259$

表 3: 窓口が混雑しているとき($\lambda = 8.0$，$\mu = 2.0$とする)

モデル1	モデル2	モデル3	モデル4
6列に並ぶ	1列に並ぶ	2列に並ぶ	3列に並ぶ
$M/M/1$	$M/M/6$	$M/M/3$	$M/M/2$
$L_q = 1.333$	$L_q = 0.569$	$L_q = 0.889$	$L_q = 1.067$
$W_q = 1.0$	$W_q = 0.095$	$W_q = 0.222$	$W_q = 0.40$

表 4: サービス率が大きいとき($\lambda = 6.0$，$\mu = 3.0$とする)

モデル1	モデル2	モデル3	モデル4
6列に並ぶ	1列に並ぶ	2列に並ぶ	3列に並ぶ
$M/M/1$	$M/M/6$	$M/M/3$	$M/M/2$
$L_q = 0.167$	$L_q = 0.009$	$L_q = 0.045$	$L_q = 0.083$
$W_q = 0.167$	$W_q = 0.002$	$W_q = 0.015$	$W_q = 0.042$

7.2 考察

顧客の到着率やサービス率を変えて数値計算をした結果，モデル2の1列に並ぶ待ち行列が駅の切符売り場において最も効率的であることがわかる．また，モデル2の1列に並ぶ待ち行列は窓口の駅員からも切符を購入する顧客の立場からも，顧客に平等に待ってもらえるという観点からも理想的である．列の数が多くなり，窓口が混雑してくるとサービスを受ける顧客の順番が変わってしまう場合もあるが，モデル2ではサービスを受ける顧客の順番が変わることがない．また，2列に並ぶモデル3と3列に並ぶモデル4の比較から$M/M/s$モデルではsの値が大きくなればなるほど顧客の平均数と平均待ち時間が小さくなり，効率的な待ち行列になっていくことがわかる．以上のことから，切符売り場ではモデル2の待ち行列が効率的な待ち行列であることがわかる．

8 おわりに

本研究では，駅の切符売り場における待ち行列の待ち時間を軽減するために考えられる4つのモデルについて考察した．顧客の平均到着率の値を変化させて，モデル1からモデル4を比較するとモデル2，モデル3，モデル4，モデル1の順番に待っている顧客の平均数，平均待ち時間が小さい．よって顧客の流れをスムーズにするためには，モデル2の1列に並ぶ待ち行列が1番効率的である．

参考文献

[1] 本間鶴千代：待ち行列の理論，理工学社(1966).

[2] 澤木勝茂，小和田正，加藤豊：OR入門-意思決定の基礎-, 実教出版 (1984).

[3] 桐山光弘：「待ち行列」がわかる本，日刊工業新聞社(1997).

[4] 大石進一：待ち行列理論，コロナ社(1997).

[5] 坂川武大：ドラッグストアのレジにおける待ち行列，南山大学数理情報学部数理科学科卒業論文(2006).