

消散性に基づく 2 自由度クレーンの制御

2004MM016 長谷川 祐子

指導教員: 高見 勲

1 はじめに

本研究での制御目的は、2 自由度クレーンの吊り荷を 2 次元空間の任意の位置へ移行させることである。従来のクレーンに関する研究では、非線形系であるクレーンのモデルに対して、吊り荷の振れをほぼ微小であるとして線形化を施している[1] [2]。また、設計問題において、消散性を用いた非線形系の設計理論が報告されている[3]。本研究では、制御対象を非線形系として扱い、制御系設計において Lyapunov 関数を構築し、制御則を導出した。

2 物理モデリング

2 自由度クレーンの簡略図を図 1 に示す。 x - y - z 座標の原点はジブの回転の中心に、 X - Y - Z 座標の原点はワイヤの上端にとる。主な記号の定義を以下に示す。

m [kg]: 吊り荷の質量, M [kg]: トロリの質量, l [m]: ワイヤの長さ, J [kg·m²]: ジブの回転軸回りのモーメント, θ [rad]: ジブの旋回角度, x_j [m]: トロリの変位, ζ [rad]: Z 軸からの振り上げ角, ϕ [rad]: ワイヤの上端から下端までを X - Y 平面に射影した線分の X 軸からの方位角, τ_1 [N·m]: ジブを旋回させるための入力, τ_2 [N]: トロリを並進させるための入力

以下の仮定に基づいてモデリングする。

1. 吊り荷を質点として取り扱う。
2. ワイヤ軸回りの吊り荷の回転運動は考慮しない。
3. ワイヤの質量は考慮せず、剛体とする。

そして、ジブの運動エネルギー S_1 、トロリの運動エネルギー S_2 、吊り荷の運動エネルギー S_3 、吊り荷の位置エネルギー U_1 を求め、2 自由度クレーンの運動方程式を Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = \tau_i, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} L(Q, \dot{Q}) &= W(Q, \dot{Q}) - P(Q), \\ W &= S_1 + S_2 + S_3, \quad P = U_1, \\ Q &= [q_1, q_2, q_3, q_4]^T = [\theta, x_j, \zeta, \phi]^T, \\ \tau &= [\tau_1, \tau_2, 0, 0]^T \end{aligned}$$

より導出する。ここで、 W は系の全運動エネルギー、 P は系の全位置エネルギー、 $L(Q, \dot{Q})$ は Lagrange 関数、 Q は一般座標、 τ は一般力である。したがって、以下の非線形微分方程式が得られる。

$$M(Q)\ddot{Q} + C(Q, \dot{Q})\dot{Q} + g(Q) = \tau \quad (2)$$

ただし、 $M(Q) \in R^{4 \times 4}$ 、 $C(Q, \dot{Q})\dot{Q} \in R^4$ 、 $g(Q) \in R^4$ はそれぞれ慣性行列、遠心力を表す非線形項、重力項である。また、重力項を、系の全位置エネルギー $P(Q)$ を用いて

$$g(Q) = \frac{\partial P(Q)}{\partial Q} \quad (3)$$

と定義する。

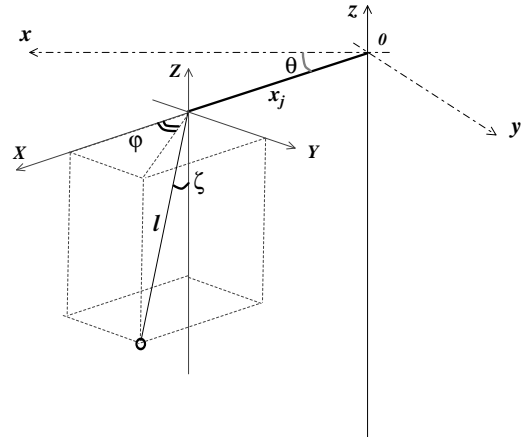


図 1: 2 自由度クレーンのモデル

3 制御系設計

一般座標 Q 、 \dot{Q} を所望の軌道 Q_d 、 \dot{Q}_d に漸近的に追従させる問題において、Lyapunov の安定定理に基づいた設計手法が有効とされている。しかしながら、一般に非線形系の Lyapunov 関数を構築するのは難しい。そこで、制御対象の物理特性を十分に生かすことによって、設計のキーとなる Lyapunov 関数を簡単に構築することができる。報告されている[3]。たとえば、式 (2) によって記述されるシステムにおいて、次の行列

$$\dot{M}(Q) - 2C(Q, \dot{Q}) \quad (4)$$

は歪対称行列であることが知られている。

3.1 位置制御

追従誤差を $e := [e_1, e_2, e_3, e_4]^T = Q - Q_d$ と定義する。本研究では位置制御を目指すので、 $\dot{e} = \dot{Q} - \dot{Q}_d$ 、 $\ddot{e} = \ddot{Q} - \ddot{Q}_d$ である。

定理 1 式 (2) のシステムに対して、制御入力 τ を

$$\tau = [-\beta_1 q_1 - \alpha_1 e_1, -\beta_2 q_2 - \alpha_2 e_2, 0, 0]^T \quad (5)$$

とおく。ただし、 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0$ は任意の定数である。

証明 Lyapunov 関数を以下のように定義する。

$$V = \frac{1}{2} \dot{e}^T M \dot{e} + P(Q) + \frac{1}{2} e^T X e \quad (6)$$

ただし、行列 X は $X = \text{diag}[\alpha_1, \alpha_2, 0, 0]$ である。式 (3) および式 (4) に着目し、この V の式 (2) の解軌道に沿った時間微分を求めると

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{e}^T M \dot{e} + \frac{1}{2} \dot{e}^T \dot{M} \dot{e} + \dot{Q}^T \frac{\partial P}{\partial Q} + e^T X \dot{e} \\ &= \dot{Q}^T M \ddot{Q} + \frac{1}{2} \dot{Q}^T \dot{M} \dot{Q} + \dot{Q}^T g + e^T X \dot{e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \dot{Q}^T (-C\dot{Q} - g + \tau) + \frac{1}{2}\dot{Q}^T \dot{M}\dot{Q} + \dot{Q}^T g + e^T X\dot{e} \\
&= \frac{1}{2}\dot{Q}^T (\dot{M} - 2C)\dot{Q} - \dot{Q}^T g + \dot{Q}^T \tau + \dot{Q}^T g + e^T X\dot{e} \\
&= \dot{Q}^T \tau + e^T X\dot{e} \\
&= \dot{Q}^T \tau + \dot{Q}^T X e \\
&= \dot{Q}^T (\tau + X e) \\
&= \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tau_1 + \alpha_1 e_1 \\ \tau_2 + \alpha_2 e_2 \end{bmatrix} \\
&= -\beta_1 \dot{q}_1^2 - \beta_2 \dot{q}_2^2 \\
&\leq 0
\end{aligned} \tag{7}$$

を得る。よって、Lyapunov の安定定理より、式 (2) のシステムの安定性がいえる。

4 シミュレーション

導出した制御入力 (5) の有効性を検証するために、シミュレーションを行った。初期状態を $Q = [0, 0.2, 0.001, 0]^T$ 、目標値を $Q_d = [\frac{\pi}{2}, 0.8, 0, 0]^T$ と設定した。また、定数 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ はそれぞれ $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1.5, \beta_1 = \beta_2 = 3$ と選定した。その応答波形を図 2, 図 3, 図 4, 図 5 に示す。図 2 の実線, 破線, 鎖線はそれぞれ θ, x_j, ζ の時間応答を表す。また、図 3 は φ の時間応答である。図 4 の実線, 破線はそれぞれ制御対象を真上からみたトロリおよび吊り荷の軌跡である。また、図 5 の実線, 破線はそれぞれ制御入力 τ_1, τ_2 の時間応答である。

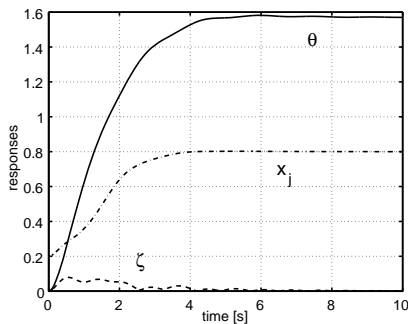


図 2: θ, x_j, ζ の時間応答

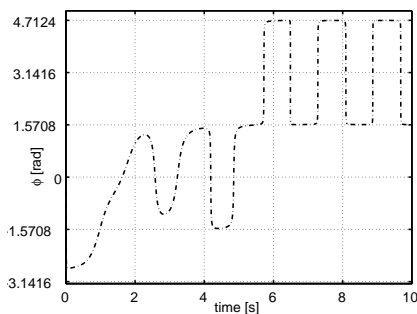


図 3: φ の時間応答

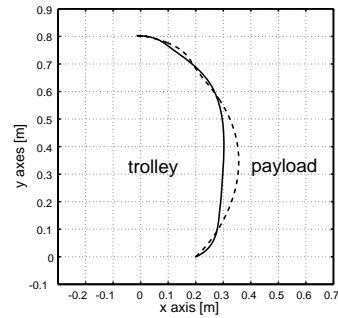


図 4: 真上からみたトロリおよび吊り荷の軌跡

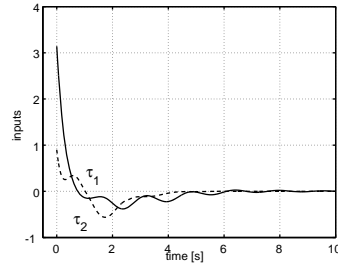


図 5: 制御入力 τ_1, τ_2 の時間応答

4.1 考察

図 2 より、ジブ θ は約 8 秒で、トロリ x_j は約 5 秒で目標位置に追従している。そのとき、吊り荷の振り上げ角 ζ はほぼゼロであるから、吊り荷は約 8 秒で目標位置に追従していることがわかる。また、図 4 より移行中および移行後において、吊り荷は大きく振れることなく追従していることが確認できる。しかし、吊り荷の振り上げ角 ζ と方位角 φ の 6 秒以降での時間応答をみると、吊り荷はジブに直交する平面内における振動に近い振る舞いをしていることがわかる。

5 おわりに

2 自由度クレーンについて物理モデルの導出を行った。その制御系設計において、消散性に基づく Lyapunov 関数を構築し、制御則を導出した。その導出には、制御対象の物理特性を利用した。そして、設計したコントローラを適用してシミュレーションを行い、その有効性を検証した。

今後の課題として、実機による理論の検証を行うことと、吊り荷の振り上げ角 ζ を考慮した新たな制御則の導出が挙げられる。

参考文献

- [1] 富武満, 有富正男: 旋回ジブクレーンつり荷の運動, 日本機械学会論文集 (C 編), 48 巻 425 号, pp.11-21 (1982).
- [2] 高木清志, 西村秀和: タワークレーンの起伏・旋回方向の分散制御, 日本機械学会論文集 (C 編), 65 巻 640 号, pp.4692-4699 (1999).
- [3] 申鉄龍, 石井千春: 消散性に基づく非線形系のロバスト制御 — 安定性と外乱抑制 —, 社団法人 計測自動制御学会 (2002).