

# 論理パズル「天国への道」の解法と応用

2004MM014 原健太

指導教員: 佐々木克巳

## 1 はじめに

数理論理学を研究していくなかで、自分が教師になったとき生徒を引き付けるような論理学はないかということ考えたとき「天国への道」という論理パズルに注目した。本研究では、真理値表を用いた「天国への道」の解法や、「天国への道」の応用問題を研究している。

## 2 論理式

真理値表を用いた解法には論理式が必要である。ここでは論理式を導入する。

### 2.1 論理記号

論理記号には $\neg$ 「でない」否定、 $\wedge$ 「そして、かつ」論理積、 $\vee$ 「または」論理和、 $\Rightarrow$ 「ならば」含意の4つがある。

### 2.2 論理式の作り方

文を記号で表したときに置き換えた記号のことを命題記号という。論理式を作るのには次のようにする。[1]に掲載されているものは省略する。

1.  $A$ を論理式とし、 $P$ を天使か悪魔か人間かの人物を表したとき、 $Y(P, A)$ も論理式である。 $Y(P, A)$ は『 $A$ が正しいか」に $P$ がイエスと答える。』である。

## 3 真理値表

もととなる文と人物に与えられた論理式の真理値を対応させることを下の表で行う。また  $\times$  を真理値という。

表 1: 真理値表

$A$	$B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$
	$\times$	$\times$		$\times$
$\times$		$\times$		
$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	

## 4 論理パズル「天国への道」の解法

### 4.1 「天国への道」

以下に、論理パズル「天国への道」を示す。

人が死ぬと天国への道のりにつきます。ところがその道の途中で二手に分かれる場所があるのです。一方は天国へ続く道であり、もう一方の道は地獄へ続く道なのです。しかし、そこには天使が二人います。しかし一人は天使の格好をした悪魔なのです。このどちらかに質問を一人に1回だけ許されています。しかも、イエス、ノーでしか返答をしてくれません。天使は正直に本当のことを言ってくれますが、悪魔は必ず嘘をつきます。

さて確実に天国へ行くには、何と聞けばよいのでしょうか？

### 4.2 模範解答

上のパズルの模範解答は「あなたに「左の道が天国ですか？」と聞いたらイエスと答えますか？」である。もしイエスと答えた場合、左の道が天国で、ノーと答えた場合、右の道が天国になる。次に模範解答を真理値表で表す。 $Y(P, A)$ を使う。 $A$ を「左の道が天国」とおく。模範解答は $Y(P, Y(P, A))$ で表すことができる。

表 2: 模範解答の真理値表

$A$	$P$	$Y(P, A)$	$Y(P, Y(P, A))$
	天使		
	悪魔	$\times$	
$\times$	天使	$\times$	$\times$
$\times$	悪魔		$\times$

### 4.3 表を作って考える

答えとなる命題を尋ねたとき、質問に対する答えは天国への方向のみに依存して、選んだ相手には無関係でなければならない。つまり表3のような質問Heavenこそ答えの論理式になる。

表 3: 天国への命題Heaven

選んだ相手	天国への道	Heavenの真偽	返答
天使	左		イエス
天使	右	$\times$	ノー
悪魔	左	$\times$	イエス
悪魔	右		ノー

### 4.4 真理値表から論理式を作る

表3の1列目と2列目を真理値に変える。1列目を選んだ相手ではなく $A$ …「選んだ相手が天使である」とし、同じように2列目は $B$ …「天国への道は左である」とする。Heavenが $\times$ になっている行を取り除く。そして $A$ の列の  $\times$  を $\neg A$ と置き換え、 $B$ の列も同じ作業をする。そしてその部分だけを抜き出し、各行を $\wedge$ で結びつける。この二つの行を $\vee$ で結ぶと

$$\text{Heaven} \cdots (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

という論理式Heavenができる。

この論理式はHeavenの真理値表を満たす。Heavenを日本語らしく直すと

あなたが天使であり左が天国への道であるか、  
あなたが悪魔であり左が地獄への道であるか？

となる。

## 5 発展問題

「天国への道」の解答の出し方を利用し、次の3つの発展問題を解く。

発展問題 1

道が3本になります。増えた1本は煉獄への道です。天国への道と同じ条件で、我慢して最悪煉獄でもよしとし、地獄だけを確実に避ける方法はあるでしょうか？

#### 発展問題2

道は2つですが、道の分岐点にはラファエル、マイケル、ガブリエルの三人がいます。彼らは天使、悪魔、人間のどれかです。人間は本当を言うか嘘をつかわからないのです。質問は2回許され、三人はお互いのことは知っています。天国へいけるでしょうか？

#### 発展問題3

道が天国、地獄、煉獄の三本です。分かれ道の所には天使と悪魔の二人です。「天国への道」と同じ条件です。さて、天国へ行くにはなんと聞けばよいでしょうか？

### 6 発展問題3の解答

三本の道の中からどの1本が天国への道かを知るには、左、右、真ん中の三種類の答えが必要であるのに対して、答えはイエスとノーの二種類しかない。イエスとノーのほかにイエスとノーと「答えない」という選択肢をつくる。

[この文章はウソである]この枠の中の文章は正しいか？

つまり、「枠の中の文章が正しい」ならば「枠の中の文章はウソである」となり、「枠の中の文章はウソである」となる。よって「正しいか」と聞かれたら、天使はノーと答えるし、悪魔はイエスと答えるのである。

しかし、このようにも考えることができる。「この文章」がウソなのだから「この文章はウソである」はウソのウソになり本当は正しいということになる。このことから天使に聞けばイエスと答えるし、悪魔に聞いたらノーと答えるはずなのである。

#### 最初の理屈は

枠の中の文章を本当だとすると、枠の中の文章はウソもう一方の理屈は

枠の中の文章をウソだとすると、枠の中の文章は本当ということになる。これは本当だとウソになり、ウソだとすると本当になるのである。これでは堂々めぐりになり、天使も悪魔も答えることができなくなる。そして「答えない」という選択肢ができるのである。そこで次のように質問する。

次の三つのうちのどれかが正しいか？

- あなたが天使であって左が天国の道である。
- あなたが悪魔であって右が天国の道である。
- 真ん中の道が天国の道であって、「この文章はウソである」が正しい。

この質問の答えは、イエスなら左、ノーなら右である。

真ん中の道が天国への道であるときは最初の2つはウソであるから、「この文章はウソである」が正しいか？と聞いているのと同じであるから天使も悪魔も答えることができないのである。

しかしこの文章はあまりにもぎこちないので「この文章が正しい」ならば「この文章がウソである」となり、「この文章」を「この質問」に代え、わかりやすく直すと

- あなたが天使であって左が天国の道である。

- あなたが悪魔であって右が天国の道である。
- 真ん中の道が天国の道であって、この質問への正しい答えはノーである。

と聞いてもよい。

次にこの解答以外の解答を論理式で見つける。答えないの真理値を とおく。真理値表は下の表4のようになる。

表4: 「答えない」の真理値表

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
x		x	

そして最初の2つの文は固定して3つ目の文をVでつなぎ、左、右、中で、x、の組み合わせになる論理式をさがすと、その真理値のとり方は表5のC1、C2、C3、C4、C5の5つあることがわかった。C1は最初に示した解答の論理式である。C1とC2はイエスだと左、ノーだと右、答えないと真ん中である。C3、C4、C5はイエスだと左、ノーだと真ん中、答えないと右の論理式である。

また、HeavenとCを^でつなぐ論理式は、xと結びとすべてxになってしまうので、右と真ん中が区別できなくなってしまうため見つからなかった。例をあげ、C2を日本語になおすと

C2: 左が天国の道であるか、「真ん中の道が天国であって、この質問への正しい答えはノー」である。

となり、そのほかにも論理式を日本語になおして、わかりやすくすると最初の解答の日本語になるか、最初の解答よりもややこしくなってしまうので最初の解答が適している。

表5: 別解の真理値表

相手	道	$A \vee B$	C1	C2	C3	C4	C5	D	E
天使	左		x		x				
悪魔	左		x		x				
天使	右	x	x	x				x	
悪魔	右	x	x	x				x	
天使	中	x			x	x	x		x
悪魔	中	x			x	x	x		x

$$D \cdots A \vee B \vee C_i (i = 1, 2), E \cdots A \vee B \vee C_i (i = 3, 4, 5)$$

### 7 おわりに

本研究では「天国への道」を色々な角度から研究し、発展問題を解くことで応用の方法を模索した。発展問題3では参考文献に示されている解答以外にも論理式を見つけ、いくつかのパターンがあったが日本語にし、わかりやすく直すと参考文献の解答になることがわかった。今後も生徒が考えられるような問題などを考えていきたい。

#### 参考文献

- [1] 八杉満利子・林晋：論理パズルとパズルの論理，遊星社（1998）。