2次元適応型積分則
三角形分割の戦略

2004MM011 古田達矢
指導教員: 杉浦洋

1　はじめに

本研究では，2次元三角領域上の定積分を近似する適応型数値積分則の構成を行う．

2次元の一般的な領域上の積分は，適当な領域分割と変数変換により三角領域上の積分に帰着できる．この意味で三角領域上の数値積分則は基本的で重要である．

適応型積分則とは，要求精度にしたがって三角領域を小三角領域に分割し，各小三角領域に同じ基本公式を用いる計算法である．分割が細かくなればなるほど精度はよくなる．その際，積分誤差の小さい部分は粗く分割し，積分誤差の大きい部分は細かく分割することによって，一様均等な分割法と比べて，より少ない分割数で同じ精度が達成できる．

分割法については，牧[2]では，小三角形領域を最長辺の中点と頂点を結ぶ線分で分割する方法を用いた．分割法としては，被積分関数の変化が激しい方向に沿った辺を分割するA.Genz，R.Coolsの方法[1]も有力と考えられる．今回は彼らの方法を参考に，より効率的な積分則の構成をした．

2　数値積分則の設計

xy-平面上の3点$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$を頂点とする，三角領域を$D = D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$と書く．

基本三角形領域$\Delta = D((0,0),(1,0),(0,1))$の$n$個の標本点$\boldsymbol{\pi}_1$=($\xi_1$,$\eta_1$),$\boldsymbol{\pi}_2$=($\xi_2$,$\eta_2$),$\cdots$, $\boldsymbol{\pi}_n$=(ξ_n,η_n)$\in\Delta$と重みρ_1,ρ_2,$\cdots$, ρ_nによる積分公式を

$$I_n f = \sum_{l=1}^{n} \rho_l f(\boldsymbol{\pi}_l)$$

と書く．

Δから一般の三角領域Dへのアフィン変換$\boldsymbol{p} = \varphi(\boldsymbol{q})$による変数変換で，

$$\iint_D f(\boldsymbol{p})dxdy = 2S\iint_\Delta f(\varphi(\boldsymbol{q}))dtdu.$$

この右辺に積分則I_nを用いてD上の積分公式

$$I_n(D)f = 2S\sum_{i=1}^{n} \rho_i f(\varphi(\xi_i,\eta_i)) \cong Q(D)f \qquad (1)$$

を得る．

定義 2.1　(積分則の次数)

任意のs次式で$Q_n f$=Qf，かつ$Q_n f$$\neq$$Qf$となる$s+1$次式が存在するとき，積分公式$Q_n$は次数$s$であると言う．

3　適応型積分則の基本アルゴリズム

εを許容誤差とする適応型積分$\tilde{Q}(D,\varepsilon)$は次のような再帰関数で表現できる．

$$\tilde{Q}(D,\varepsilon)f = \begin{cases} I_n(D)f & (E_n(D)f \le \varepsilon) \\ \tilde{Q}(D_1,\frac{\varepsilon}{2})f + \tilde{Q}(D_2,\frac{\varepsilon}{2}) & (E_n(D)f > \varepsilon) \end{cases}$$

ここでは，I_mをI_nの低次埋め込み公式と言う．

与えられた許容誤差$\varepsilon > 0$に対し真の積分値$Q(D)f$の近似積分$\tilde{Q}(D)f$を

$$|\tilde{Q}(D)f - Q(D)f| \le \varepsilon$$

を満たすように計算する．

もし，

$$|\tilde{Q}(D)f - Q(D)f| > \varepsilon$$

なら，領域Dをその頂点と重心$\boldsymbol{g}$を通る直線で小三角領域D_0, D_1に2分し(**図1**)，それぞれに同じ積分則(1)を用いる．

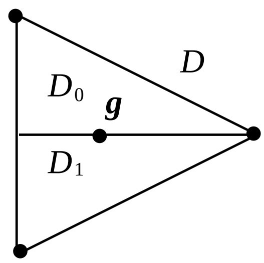

図 1: 三角形の分割

この再帰的な操作をくりかえし，すべての小領域で割り当てられた許容誤差を満たした時点で近似積分が完了する．

分割は，辺の中点と重心を結ぶ直線による面積等分割を用いる．選ぶ辺により，3つの分割方向が考えられる効率的な数値積分の構成には分割方向の決定が重要である．

4　適応型積分則における分割方向の決定法

4.1　牧の分割法とその欠点

牧[2]では，誤差の定理から，領域Dを含む最小の円の半径を小さくするために三角形の最長辺を2等分した．この方法では，被積分関数の情報が反映せず，理想的な分割に比べ，分割数が増えてしまうと思われる．

4.2　A.Genz，R.Coolsの分割法とその欠点

A.Genz，R.Coolsは，被積分関数の4階差分を使って，各辺方向の4次方向微係数を近似計算し，それが最大となる辺を分割する方法を提案している[1].

彼らは，分割すべき三角形$D{=}D(\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)$において，重心$\boldsymbol{c}$を通り，$\boldsymbol{d}_{ij}{=}\boldsymbol{v}_j-\boldsymbol{v}_i$方向の直線$l_{ij}$上の関数値を

$$f_{ij}(t)=f(\boldsymbol{c}+\frac{t{\cdot}\boldsymbol{d}_{ij}}{15})(n=2)$$

による4階差分

$$\Delta^4 f_{ij}=f_{ij}(-4)-4f_{ij}(-2)+6f_{ij}(0)-4f_{ij}(2)+f_{ij}(4)$$

を計算する．そして，分割方向を定める指標を

$$D_{ij}(f)=||d_{ij}||_1|\Delta^4 f_{ij}|$$

とし，これが最大の辺を分割する．

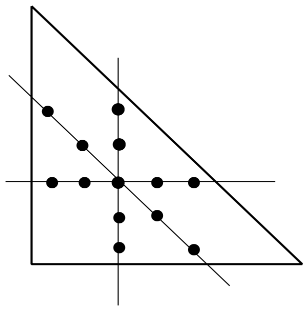

図 2: A.Genz，R.Cools法における差分の標本点配置

三角形領域における$f(x)$の$\boldsymbol{d}_{ij}$方向の変化の激しさを4階差分の絶対値$|\Delta^4 f_{ij}|$でとらえている．

この方法の欠点は，高コストであることである．なぜなら，分割方向の決定だけに13点の付加的な標本点を消費してしまうからである．

4.3 我々の方法

我々は，A.Genz，R.Coolsの方法を参考に，積分誤差を考慮に入れた分割決定をするために，差分を採用した．そして，4階差分を採用していた彼らの方法では，計算したい式が3次式のとき，4階差分が0になる．しかるに，我々の積分公式は，埋め込み公式が2次であるため，3次式を積分すると，一般には分割要求が起きるので不都合が起きる．彼らの論文は高次則の使用を前提としているので，4階差分を採用していたが，我々の研究では，埋め込み公式が2次則なので，3階差分を採用することが妥当であると考えた．

今回の3階差分の標本点は，

$$\begin{cases} i,j & \in\{0,1,2\},i{\neq}j, \\ k & \in\{0,1,2\}-i,j \end{cases}$$

として，

$$f_{ij}(t)=f(\frac{1}{4}((3-t)v_i+tv_j+v_k))$$

とする．これらはすべて積分標本点と重なり，三角形の辺と平行に等間隔に並ぶ．これらの配置を図3に示す．よって3階差分を取るので，

$$\Delta^3 f_{ij}=f_{ij}(0)-3f_{ij}(1)+3f_{ij}(2)-f_{ij}(3)$$

を用いる．

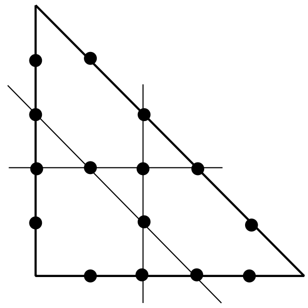

図 3: 我々の方法による分割の標本点配置

4.4 数値実験結果

ここでは，e^{x+y}の積分の結果を記載した．許容誤差は$\varepsilon=10^{-6}$である．

この問題では，我々の方法は最高の効率を示した．G.C.は，分割回数はFと等しいが，差分計算の非効率性のゆえに敗北を喫している．MはFに比べて，6倍もの標本点を必要とした．

表 1: e^{x+y}の分割回数

	e^{x+y}
M	159
G.C.	26
F	26

表 2: e^{x+y}の計算回数

	e^{x+y}
M	2226
G.C.	702
F	**364**

5 おわりに

三角領域における適応型積分則をC言語で作成した．

牧[2]では，分割方向は，三角形領域の形状に基づき決定したが，我々は，被積分関数の方向微係数に基づく決定法を行った．また，決定法は，A.Genz，R.Cools[1]を参考に差分法を利用したが，その階数は，埋め込み公式の次数2を考慮して3とした．

これら3つの分割法により，数値実験を行った結果，我々の方法が最優秀で最も少ない標本点で積分に成功した．

とはいえ，3次単項式x^2yの積分では，かなり分割数が大きくなるというように，不安定なふるまいもあり，今後の改良が期待される．

また，今回は基本公式に3次則を用いたが，より高次の基本公式を用いた適応型積分則に我々の分割法を組み合わせた実験も興味深い課題である．

参考文献

[1] A.Gentz，R.Cools，*An Adaptive Numerical Cubature Algorithm for Simplices*， ACM Transactions on Mathmatical Software，Vol.29，No.3，September 2003，P.297–308.

[2] 牧哲弘，領域の三角分割による2次元適応型積分則，南山大学数理情報学部数理科学科2006年度卒業論文，2007.

[3] 野田恭代，二次元完全対称積分則の設計， 南山大学数理情報学部数理科学科2006年度卒業論文， 2007.