項の書き換えの基礎理論

2004MM004 馬場 正貴
指導教員: 宮元 忠敏

1 はじめに

項の書き換えは等式論理に基づいており，方向性のある交換規則として定義される．そのため，計算や論理にも多用でき，コンピュータ科学を始め，論理学，代数学，関数型言語，定理自動証明など，計算機科学の多くの分野で用いられている．今日では，計算機科学の重要な研究分野の一つとして広く認められている．

ここで，記号列の書き換えが計算であると考え，得られる書き換え系を例に示す．$1+1=2$という等式を例にとるとする．しかし，等式そのものは，計算という意味はもたない．$1+1=2$という等式には左辺$1+1$と右辺2が等価という意味しかない．そこで，等式を計算という観点で見ると，記号列$1+1$から記号列2への書き換えと見ることができる．すなわち，等式$1+1=2$を複雑な式から単純な式への書き換え規則$1+1 \to 2$ のように結びつけることが可能である．

項の書き換え系の計算は，これらの書き換え規則を繰り返し適用することで，与えられた項がもっとも単純な形(正規形)に到達するまで減少させることで可能になる．よって，等式に基づいて記述された関数型プログラムや代数的仕様記述などを本質的に表現することができる．また，自動証明における等式推論を考える上で，証明を効率的な計算に置き換えることも可能となる．

2 抽象書き換え系

抽象書き換え系とは集合AとA上の二項関係$\to$で定義される，系$\mathcal{A}=(A,\to)$のことを言う．

記法等は[1]に従い，ここでは主要な性質をあげる．

弱合流性(WCR性)　$\forall a,b,c \in A, b \leftarrow a \to c \Rightarrow b \downarrow c$

合流性(CR性)　$\forall a,b,c \in A, b \leftarrow^* a \to^* c \Rightarrow b \downarrow c$

WN性　$\mathcal{A}$が全ての$a \in A$で正規形を持つ

SN性　$\mathcal{A}$が全ての簡約経路で有限である

UN性　$\forall a,b,c \in A,$
　　$a \to^* b, a \to^* c, b, c$は共に正規形 $\Rightarrow b \equiv c$

NF性　$\forall a,b \in A, b$が正規形で$a=b \Rightarrow a \to^* b$

次に，抽象書き換え系の諸性質の関連を示す．

定理

1. $CR \to NF$　　2. $NF \to UN$
3. $CR \to UN$　　4. $UN \wedge WN \to CR$
5. $SN \wedge WCR \to CR$ ($Newman$の補題)

3 項への拡張

3.1 項

項とは，関数記号と変数から成り立っているもののことをいう．記法等は[4]に従うものとする．記号$\sum$は関数記号の集合とし，$f \in \sum$で，自然数nに対して$\sum$のn変数関数記号記号の全体を$\sum^{(n)}$として示す．

定義　記号を$\sum$，変数の集合をXとしたとき，$\sum \cap X = \emptyset$である．また，X上の$\sum-term$全体の$\mathcal{T}(\sum, X)$を帰納的に定義すると，$\mathcal{T}(\sum, X)$は$1,2$のみによってつくられる．

1. $X \subseteq \mathcal{T}(\sum, X)$　すなわちすべての変数は項である．
2. $f \in \sum^{(n)}, t_1, t_2, \cdots, t_n \in \mathcal{T}(\sum, X)$となるとき，$f(t_1, t_2, \cdots, t_n) \in \mathcal{T}(\sum, X)$となる．

3.2 代入

記号を$\sum$，Vを加算無限集合とする$\mathcal{T}(\sum, V)$上で今後，$\sigma : V \to \mathcal{T}(\sum, V)$ を代入という．代入を導入することで，可算無限集合から項へ対応させることができる．また，項から項へも拡張させることができ，代入と代入を合成させることもできることが証明できる．

3.3 $identity$

対$(s,t) \in \mathcal{T}(\sum, V) \times \mathcal{T}(\sum, V)$を$\sum-identity$という．単に，$identity$ともいい，$s \approx t$と書く．また，$identity$のとき，$\to_E \subseteq \mathcal{T}(\sum, V) \times \mathcal{T}(\sum, V)$となる二項関係$\to_E$を次のように定める．記法等は本論文3.1.3定義に示す．

$$\begin{aligned} s \to_E t \quad \Leftrightarrow \quad & \exists (l,r) \in E, p \in Pos(s), \sigma \in Sub \\ & s|_p = \sigma(l), t = s[\sigma(r)]_p \end{aligned}$$

3.4 同値関係$\leftrightarrow_E^*$

$\leftrightarrow_E^*$は$\to_E$から導かれる同値関係で，$\to_E \Rightarrow \leftrightarrow_E^*$であるような最小の関係であることが定義される．

このことより，$\to_E$でいえることに関しては，$\to_E^*$でもいえて，関係付けることができる．

3.5 等式理論

アルファベット$\sum$と$\sum$上の項の等式に関する理論である．ここでの等式仕様$(\sum, E)$が定義する等式理論は，等式の集合Eの公理を1とし，次の$2 \sim 6$の公理と推論規則によって導出される等式の集合である．

$$1.\ \frac{(s \approx t) \in E}{(\sum, E) \vdash s \approx t} \quad 2.\ \frac{}{(\sum, E) \vdash t \approx t}$$

$$3.\ \frac{(\sum, E) \vdash s \approx t}{(\sum, E) \vdash t \approx s} \quad 4.\ \frac{(\sum, E) \vdash s \approx t}{(\sum, E) \vdash \sigma s \approx \sigma t}$$

$$5.\ \frac{(\sum, E) \vdash s_1 \approx t_1, \cdots, (\sum, E) \vdash s_n \approx t_n}{(\sum, E) \vdash f(s_1, \cdots, s_n) \approx f(t_1, \cdots, t_n)}$$

$$6.\ \frac{(\sum, E) \vdash t_1 \approx t_2, (\sum, E) \vdash t_2 \approx t_3}{(\sum, E) \vdash t_1 \approx t_3}$$

定理　$E \vdash t \approx s \Leftrightarrow t \leftrightarrow_E^* s$

この定理が証明できたことにより，等式論理と$\leftrightarrow_E^*$を対応させられることがわかる．また，EがSN性とCR性を持つ場合，$t \to_E s$とも対応させられる．そして，EをRのような規則によって制限をすることによって，次に示す項の書き換え系が示せる．

3.6 項の書き換え系

書き換え規則の集合の対$(\mathcal{T}(\sum, V), R)$を項の書き換え系という．このとき$R = \{s_i \to t_i \mid s, t \in \mathcal{T}(\sum, V), i \in I\}$ は項の対s_i, t_iから作る書き換え規則$s_i \to t_i$の集合で$s_i, t_i, (i \in I)$は$s_i \notin V,\ Var(t_i) \subseteq Var(s_i)$を満たす．

例 自然数上の加算を項書き換え系として表す．まず，$\sum^{(0)} = \{0\},\ \sum^{(1)} = \{s\},\ \sum^{(2)} = \{plus\}, V = \{x, y\}$とし，$0, 1, 2, \cdots$を$0, s(0), s(s(0)), \cdots$と表現できる．すると，等式$E$と$E$を左辺から右辺への書き換え系とみなした$R$を以下のように示せる．

$$E = \begin{cases} x + 0 & = & x \\ x + s(y) & = & s(x + y) \end{cases}$$

$$R = \begin{cases} plus(x, 0) & \to & x \\ plus(x, s(y)) & \to & s(plus(x, y)) \end{cases}$$

このように実際の計算をすべて書換規則のみで表現することが可能である．計算可能な関数は有限回の書換により表せることが知られており，項書き換え系は計算モデルとして活用できる計算能力を持っていることがわかる．

4 判別問題

ここでは，今までの恒等式上での考えとは違い，方程式$t = s$で考察していく．

4.1 $Syntactic\ unification$

$Syntactic\, unification$(構造の単一化)とは，E, s, tが与えられたとき，$\sigma s \approx \sigma t$を満たすような$\sigma$を見つけることをいい，語問題を解くための過程のことを$unification$という．このことは合流性や危険対などの基礎としても使われている．したがって，$E = \emptyset$であるs, tにおいて$\sigma(s) \equiv \sigma(t)$が存在するか否かを答えて，存在するならば$\sigma$を返す，というようなものを考える．

4.2 $Unify$

$E = \emptyset$であるとき，$E \vdash \sigma(t) \approx \sigma(s)$となる代入$\sigma$を見つけるアルゴリズムを$Unify$(単一化)という．

本論文4.2節において，$Unify$を考える問題が解くことが可能ならば，$Unify$は失敗しないことが証明できるので，方程式上へも拡張できることがいえる．

5 簡約戦略

簡約を行なう上で，可簡約項と書き換え規則の選び方などによって求められる項が異なってくる．その選び方を戦略とし，考える上で必要なことを示していく．

5.1 正則項書き換え系

線形$\cdots$同一変数を二つ以上含まないこと
左線形$\cdots$書き換え規則のsが線形
重なり$\cdots \exists u \in Pos\,(s_1)$,
$\exists$代入$\theta[s_1|_u \notin V$かつ$\theta(s_1|_u) \equiv \theta s_2]$
左線形かつ重なりのない書換を正則項書き換え系という．

また，正則項書き換え系がCR性を持つことについては[3]に示されているため参照にしてほしい．

6 危険対

正則項書換系はCR性を持つので，適応の場所や順序に関係なく，唯一の正規系が得られる．しかしながら，一つの項に複数の書き換え規則が適応できる場合，適応の場所や順序によって異なる項が出現する．このCR性を分析するため，危険対を導入する．

7 完備化手続き

等式の集合$E = \{s_i \approx t_i \mid i \in I\}$を考える．普遍代数においては，等式$s \approx t$が$E$から導けるかを決定する問題を考える．

7.1 厳格半順序

任意の集合X上に定義された二項関係$\succ$が厳格半順序であるとは，推移的$(\forall x, y, z \in X(x \prec y, y \prec z \Rightarrow x \prec z))$かつ非反射的$(\forall x \in X \neg(x \prec x))$であることである．

CPC手続きが完備な項書換系となりプログラムが終了するか否かは厳格半順序に依存する．

7.2 CPC手続き

CPC手続きとは，等式の集合Eと項の間の厳格半順序$\succ$を与え，そこから書き換え規則の集合Rを導き出し，Rの危険対の集合CPを作る．そこから一つ危険対を取り出し，Rに関してそれぞれ正規形を求め，その正規形が等しくなければ，厳格半順序に基づいて新しい書き換え規則をRに追加する．これを繰り返し行い，$CP = \emptyset$になったら終了するプログラムのことをいう．そして，書き換え系Rを完備化するためには，論理的に等価な変形を行い，発散する危険対を消せばよい．

8 終わりに

本論文で，抽象的なものから等式理論への対応のさせ方や，完備化手続きにいたるまで，項の書き換えの基礎について詳しく学ぶことが出来た．よって今後，さらに項の書き換えについて学んでいく上で，一歩でも，正確に出てくるプログラムに近づきたい．

また，項の書き換えについて興味を持ったのであれば，[2]には是非目を通してもらいたい．そして，[5]，[6]も参考にされるといいだろう．

参考文献

[1] 井田哲雄：計算モデルの基礎理論，岩波書店 (1991).

[2] 外山芳人，東北大学：項書き換えシステム入門

[3] G.Huet,Confluent reductions: abstract properties and applications to term rewriting systems,J.ACM, Vol.27,No.4,(1980),pp.797-821.

[4] F.Baader,T.Nipkow: Term rewriting and all that (Cambrige University Press,1998).

[5] M.Bezem,J.W.Klop,R.de.Vrijer: Term Rewriting Systems(Cambrige University Press,2003).

[6] Enno Ohlebusch: Advanced Topics in Term Rewriting(Springer,2002).