区間初等関数の作成

2004MM002 青木 啓介
指導教員: 杉浦 洋

1 はじめに

本研究は，精度保証付き数値計算システムの構築を目的とする．電子計算機は実数を２進有限桁の浮動小数点数で近似して(丸めて)扱うため，丸め誤差が発生する．また一般に関数は近似関数で計算され，方程式は近似方程式で置き換えられるので，理論誤差が発生する．

そのため，計算機による数値計算の結果は厳密に正しいことが保証されていない，したがって，数値計算結果がどの程度正しいか評価することが必要となってくる．このような目的に対し，適切な計算環境を与えるシステムが精度保証付き数値計算システムである．

本研究では，初等関数sineとcosineの区間関数を作成した．まず，構成の容易な区間象限sine関数，区間象限cosine関数を作成し，それにより，区間sine関数と区間cosine関数を作る．ここで，象限sine関数，象限cosine関数は，

$\mathrm{sinq}(x) = \sin\frac{\pi}{2}x, \mathrm{cosq}(x) = \cos\frac{\pi}{2}x.$

これらの周期は4となり，2進計算機で扱いやすい．

2 IEEE754

IEEE754とは，近年コンピュータで標準的に用いられている浮動小数点数システムの規格である．IEEE754は，浮動小数点集合の定義と，その上の四則演算と開平の規格からなる．これにより四則演算と開平の精度保証が可能となる．また，多様な精度保証付き数値計算を効果的に行うには，初等関数の区間関数を開発する必要がある．

2.1 浮動小数点数の規格

2進規格化浮動小数点数とは，

$a = \pm\sum_{i=0}^{N} d_i 2^{-i} \times 2^e: \quad d_i \in \{0,1\},$

と書ける数をいう．小数部の桁数Nはシステムの定数で，倍精度では$N = 53$，拡張倍精度では$N = 64$である．
また拡張倍精度では-32767$\leq e \leq$32768になる．2進規格化浮動小数点数全体の集合を$\mathbb{F}$とする．

2.2 丸めモード

計算機上では，一般の実数は，$\mathbb{F}$の数に丸められ，メモリに格納される．IEEE754では次の丸めモードが指定できる．cを実数($c \in \mathbb{R}$)とし以下にまとめる．

1. 上向き丸め(round upward)c以上の最小の浮動小数点数に丸める．これを$\triangle : \mathbb{R} \to \mathbb{F}$と表す．
2. 下向き丸め(round downward)c以下の最大の浮動小数点数に丸める．これを$\bigtriangledown : \mathbb{R} \to \mathbb{F}$と表す．
3. 最近点への丸め(round to nearest)cに最も近い浮動小数点数に丸める．これを$\square : \mathbb{R} \to \mathbb{F}$と表す．もし，このような浮動小数点が2つある場合には，仮数部の最後のビットが0である浮動小数点に丸める．
4. 切捨て(round toward 0)絶対値が$|c|$以下の浮動小数点数の中でcに最も近いものに丸める．

2.3 機械四則演算の規格

機械四則演算は，真の四則演算の結果を丸めたものと完全に一致するように定められている．すなわち，指定された丸め$\bigcirc \in \{a\}$における，真の四則演算$\cdot \in \{+, -, \times, \div\}$に対応する機械四則演算$\odot$は

$$[x] \odot [y] = \bigcirc[x] \cdot [y], \qquad (x, y \in \mathbb{F}) \tag{1}$$

である．

3 区間関数

区間解析において，区間とは，閉区間

$$[\underline{x}, \overline{x}] = \{x \in \mathbb{R} \mid \underline{x} \leq x \leq \overline{x}\} \tag{2}$$

である.ただし，$\underline{x} \leq \overline{x} \in \mathbb{R}$．区間を$[x] = [\underline{x}, \overline{x}]$ と表すこともある． 区間全体の集合を$I(\mathbb{R})$と書く．
連続関数$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は

$$f([x]) = \{f(x) | x \in [x]\} \tag{3}$$

により$I(\mathbb{R})$上の関数に拡張できる．これをfの区間関数という．

4 ホーナー法の丸め誤差解析

与えられたxに対し，多項式の値

$$y = y_n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \tag{4}$$

の計算法するホーナー法のアルゴリズムは

$$\begin{cases} y_0 = a_n \\ y_k = x y_{k-1} + a_{n-k} \quad (k = 1, 2, \cdots, n) \end{cases} \tag{5}$$

である．

機械計算によるホーナー法は

$$\begin{cases} \hat{y_0} &= a_n \\ \hat{y_k} &= (\hat{x} \boxtimes \hat{y_{k-1}}) \boxplus a_{n-k} \quad (k = 1, 2, \cdots, n) \end{cases} \tag{6}$$

である．そして,多項式の計算は

$$\hat{y} = \hat{y_n} \cong y$$

となる．その丸め誤差$e = \hat{y} - y$について，次の定理が成立する．

［定理］式(6)によるホーナー法の機械計算の結果は，$|x| \leq r$のとき

$$\begin{aligned} \hat{y} &= y + e \\ e &\leq M_r \equiv |a_n| r^n \frac{n(t+2)}{1 - n(t+2)u} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} |a_{n-j}| r^{n-j} \frac{\{(n-j)(t+2)+1\}u}{1 - \{(n-j)(t+2)+1\}u} \end{aligned}$$

ここでuは丸め誤差単位$u=2^{-64}$である．

4.1 $\mathrm{sinq}(x), (|x| \le \frac{1}{2})$の区間包囲

sinq関数の近似関数xsinqを

$$\mathrm{xsinq}(x) = xP(x) \cong \mathrm{sinq}(x)$$

の形式で作る．ここで$P(x)$は二宮(文献[１])の設計した14次多項式で

$$P(x) = \sum_{k=0}^{7} a_k x^{2k}$$

である．$xP(x)$をホーナー法を用いて機械計算したものを$\hat{y}$とおくと，ここで，理論誤差評価と丸め誤差は，それぞれ，

$$|\mathrm{xsinq}(x) - \mathrm{sinq}(x)| \le |x| M_t, \quad (7)$$
$$|\mathrm{xsinq}(x) - \hat{y_7}| \le |x| M_r \quad (8)$$

となる．M_rは，第4章の定理による定まる定数である．
式(7)の不等式は精度保証付き計算で確認した．ゆえに

$$\begin{aligned} |\mathrm{sinq}(x) - \hat{y}| &\le M|x|, \\ M = M_t + M_r &= 2.37 \cdots 10^{-19} \end{aligned}$$

これにより，$\mathrm{sinq}(x)$の区間包囲が次式で与えられる．

$$\mathrm{sinq}(x) \in [\hat{y} - M|x|, \hat{y} + M|x|] =: \mathrm{psinq}(x)$$

である．

4.2 $\mathrm{cosq}(x)(|x| \le \frac{1}{2})$の区間包囲

$\mathrm{cosq}-1$関数の近似関数

$$\mathrm{xcosq}(x) = x^2 P(x) \cong \mathrm{cosq}(x) - 1$$

を作る．ここで$P(x)$は二宮の設計した

$$P(x) = \sum_{k=0}^{7} a_k x^{2k}$$

である．ここで，理論誤差評価と丸め誤差は，それぞれ，

$$|\mathrm{xcosq}(x) + 1 - \mathrm{cosq}(x)| \le |x|^2 M_t \quad (9)$$
$$|\mathrm{xcosq}(x) - \hat{y_7}| \le |x|^2 M_r \quad (10)$$

となる．M_rは第4章により定まる定数である．
式(9)の不等式は精度保証計算で確認した．ゆえに

$$\begin{aligned} |\mathrm{cosq}(x) - \hat{y}| &\le M|x|, \\ M = M_t + M_r &= 1.22 \cdots \times 10^{-19} \end{aligned}$$

これにより，

$$\mathrm{cosq}(x) \in [\hat{y} + 1 - M(|x|)^2, \hat{y} + 1 + M(|x|)^2] =: \mathrm{pcosq}(x)$$

である

5 $x \in \mathbb{F}$の点区間関数

$x \in \mathbb{F}$の点区間関数は

$$\begin{aligned} \mathrm{sinq}(2n+t) &= (-1)^n \mathrm{sinq}(t), \\ \mathrm{cosq}(2n+t) &= (-1)^n \mathrm{cosq}(t), \quad n \in \mathbb{Z} \\ \mathrm{sinq}(\frac{1}{2} - t) &= \mathrm{cosq}(t), \\ \mathrm{cosq}(\frac{1}{2} - t) &= \mathrm{sinq}(t), \end{aligned}$$

より，$x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$の点区間関数に帰着できる．

6 区間sinq関数，区間cosq関数

点区間関数psinq, pcosqを用いて，区間関数sinq, cosqを構成する．
区間$[x] = [\underline{x}, \overline{x}]$に対して，

$$\underline{\mathrm{sinq}([x])} = \begin{cases} -1, & (4\mathbb{Z}+3) \cap [x] \ne \phi, \\ \min\{\underline{\mathrm{psinq}(\underline{x})}, \underline{\mathrm{psinq}(\overline{x})}\}, & (4\mathbb{Z}+3) \cap [x] = \phi, \end{cases} \quad (11)$$

$$\overline{\mathrm{sinq}([x])} = \begin{cases} 1, & (4\mathbb{Z}+1) \cap [x] \ne \phi, \\ \max\{\overline{\mathrm{psinq}(\underline{x})}, \overline{\mathrm{psinq}(\overline{x})}\}, & (4\mathbb{Z}+1) \cap [x] = \phi \end{cases} \quad (12)$$

また，ここで$\mathbb{Z}$は整数全体である．$\mathrm{cosq}([x])$の上下限は

$$\underline{\mathrm{cosq}([x])} = \begin{cases} -1, & (4\mathbb{Z}+2) \cap [x] \ne \phi, \\ \min\{\underline{\mathrm{pcosq}(\underline{x})}, \underline{\mathrm{pcosq}(\overline{x})}\}, & (4\mathbb{Z}+2) \cap [x] = \phi, \end{cases} \quad (13)$$

$$\overline{\mathrm{cosq}([x])} = \begin{cases} 1, & 4\mathbb{Z} \cap [x] \ne \phi, \\ \max\{\overline{\mathrm{pcosq}(\underline{x})}, \overline{\mathrm{pcosq}(\overline{x})}\}, & 4\mathbb{Z} \cap [x] = \phi \end{cases} \quad (14)$$

である．

7 区間sin関数，区間cos関数

$\sin(x) = \mathrm{sinq}(\frac{2}{\pi}x), \cos(x) = \mathrm{cosq}(\frac{2}{\pi}x)$ゆえ，

$$\sin[x] = \mathrm{sinq}(\left[\frac{2}{\pi}\right][x])$$
$$\cos[x] = \mathrm{cosq}(\left[\frac{2}{\pi}\right][x])$$

で計算する．ここで，$[\frac{\pi}{2}]$は$\frac{\pi}{2}$を含む機械区間とする．
これらの右辺を機械計算して$\sin[x], \cos[x]$の包囲区間を計算する．

8 おわりに

今回の研究では，区間sin関数，区間cos関数の実装を完了することができた．今後の課題は，残りすべての初等関数の区間関数を実現することである．

参考文献

[1] 二宮市三：関数システム, 私信(2007).

[2] 大石進一：数値計算, 裳華房 (1999).

[3] 大石進一：精度保証付き数値計算, コロナ社 (2000).