ルベーグ測度とハウスドルフ測度

2001MM014 井戸田海平

指導教員: 宮元忠敏

1　はじめに

本論文では長さ，面積，体積といったような測度について考察を進めていく．私達が普段何気なく使っている長さ，面積，体積とはいったいなんなのか．長方形の面積ならば縦×横といった計算でその面積を求めることができる．しかし複雑な図形の面積を求めることにはなかなか触れてこなかった．そのような複雑な図形の測度を測る際にルベーグ測度，ハウスドルフ測度が使われている．

論文の内容としてはまずジョルダンによる素朴な面積の理論を考え，複雑な図形を小さな正方形で覆ってみることによってどのような結果が得られるのかを推測する．そこでジョルダンの意味では測度が測れない，ハルナック集合とよばれる集合が存在する．その測度を測ることのできる測度がルベーグによる面積の測度の定義である．その定義はジョルダンによる面積の定義の延長で小さな有限個の正方形で覆っていたものを，いくらでも小さくできる正方形無限個で覆っていくことによって測度を測っていくというものである．その定義を用いてカントル集合とよばれる集合の測度を測り，考察する．カントル集合は[0,1] 上の完全集合となっているもので,縮小写像を用いて作られる非常に複雑で豊かな集合である．ルベーグ測度ではカントル集合の測度は0となってしまうのだが，果たして本当に測度は0なのだろうか．そのことについても考察を行う．

最後にルベーグ測度では測れなかった集合に対してハウスドルフ測度といわれる測度を用いて集合の測度を測っていく．ハウスドルフ測度の考えはルベーグに近いものではあるが，その特徴として，自然数空間以外の測度も測れるということが挙げられる.自然数空間とは先に述べたような1次元，2次元，3次元空間である．ハウスドルフ測度では1次元と2次元の間，2次元と3次元の間,つまり実数次元といったものの存在を確認することができる．

2　ジョルダンによる面積の考え方

そもそも長さ，体積，面積とはなんなのか．今回は面積に限って考えてみるが，例えば一辺xの正方形ならその面積は$x \times x = x^2$となる．行ったことは正方形の縦と横を掛け合わせただけだ．三角形ならば底辺×高さ×1/2 と計算することで面積が求まることになっている．

しかしもっと複雑な図形の測度を測る際にはどうすればいいのか．ジョルダンによる面積の考え方は簡潔に述べると，測りたい図形を一辺が何らかの正方形で覆い，その覆った正方形の枚数によって図形の測度を近似していくことである．例えば一辺xの正方形がその図形にn枚敷けたとすれば，図形の測度はnx^2となる．この正方形を基本正方形と呼ぶ．この考え方をもう少し正確に定義し直したものがジョルダンによる面積の定義となる．

基本正方形によって図形を覆う方法は二通りある．図形に対して内側から基本正方形を敷き詰めていく方法と，外側から覆っていく方法である．内側から敷き詰めていく方法で図形の測度を近似した場合は，その測度をジョルダン内容量とし，外側から覆っていった場合の図形を近似した測度をジョルダン外容量とする．その二つの測度が一致した場合，その測度をジョルダン容量とし，図形の測度とする．ジョルダン内容量を$c(A)$，ジョルダン外容量を$C(A)$とし

$$J(A) = c(A) = C(A)$$

となったときの$J(A)$をジョルダン容量とし，集合Aの測度とすることができる．

3　ルベーグによる面積の考え方

前節で述べたジョルダンによる面積の定義を改良したものが本論文のテーマであるルベーグによる面積の定義となる．根本的な違いはないのだが，ジョルダンでは図形を覆う基本正方形の一辺はεで，その数は有限個であったのに対し，ルベーグでは基本正方形の一辺をいくらでも小さくすることができ，さらに無限個の基本正方形で図形を覆うことができるようになっている．基本正方形をいくらでも小さくできるということは，図形の測度がより正確に測れることになり,ジョルダンでは測ることのできないような複雑な図形の測度も測れるようになっている．

ジョルダンによる面積の考え方と同様に，ルベーグ内測度，ルベーグ外側度とよばれるものがある．ルベーグ外側度はジョルダン外容量とほぼ同じ容量で，図形を外側から覆って測度を近似していく．次にルベーグ内測度だが，ジョルダン内容量では基本正方形を図形の内側に敷き詰めて測度を近似していったが，基本正方形を内に含み得ないような場合には測度が測れなくなってしまうという欠点が存在する．そこで，ルベーグ内測度では基本正方形の代わりに，有界閉集合を用いて定義をしていく．有界閉集合を用いる理由は，基本正方形を含めない点集合や，連続曲線の軌跡などの薄い図形の測度も測ることができるからである．また有界閉集合を覆う無限個の開集合列の中から有限個の開集合列を選び，その有限個の開集合列で有界閉集合を覆うこともでき，非常に扱いやすいからである．

ルベーグによる面積の考え方と，ジョルダンによる面積の考え方との大きな違いは図形を覆う基本正方形を無限個で考えるか，有限個で覆うかという点にある．無限個で測るときには，基本正方形の一辺はどこまででも小さくすることができる．つまり限りなく連続に近いもので図形の測度を測っていることになるので，より正確な測度が得られるようになったのである．

ルベーグ内測度を$m_*(A)$，ルベーグ外側度を$m^*(A)$とし

$$m(A) = m_*(A) = m^*(A)$$

が成り立っているときの$m(A)$をルベーグ測度とできる．

4　ハウスドルフ測度

ルベーグ測度の欠点は2次元内に展開した曲線の長さを測れないことにある．2次元内に展開した曲線は2次元ルベーグ測度を用いて測ることになるが，2次元ルベーグ測度は面積を測定するために用いられるので，曲線の測度は0となってしまう．かといって1次元ルベーグ測度で測ろうとしても，1次元ルベーグ測度は1次元上のものしか測れないので，2次元空間内に展開した曲線の長さを測ることはできない．そこで1次元ハウスドルフ測度を用いて曲線の長さを測る．

ルベーグ測度では基本正方形を用いて測度を測ったために，曲線を覆う基本正方形の一辺を小さくすると，測度が限りなく0に近付いてしまい，曲線の長さが測れなくなってしまう．そこで1次元ハウスドルフ測度では，曲線を基本正方形の代わりにR^2内の任意の図形によって覆い，その任意の図形の直径の和によって曲線の長さを近似していく方法を用いる．様々な覆い方が考えられるが，その覆い方の極限をとってやれば，その極限値の測度が曲線の長さを最もよく近似しているといえる．

この考えをs次元に拡張していく．ある道の長さLを測るときに，長さεがいくつその中に入るかで考えたとする．その個数をXとすると$L = X \times \varepsilon$となり$X = L \times \varepsilon$がわかる．よって

$$L = L\varepsilon \times \varepsilon$$

が得られる．次に幅δ，長さLの道の面積について考えてみる．一辺がε の正方形がX'枚道の中に収まったと考えると$\delta L = X' \times \varepsilon^2$となり，$X' = \delta L \times \varepsilon^{-2}$がわかる．よって

$$\delta L = \delta L \varepsilon^{-2} \times \varepsilon^2$$

となることがわかる．つまり，1次元の道の長さを測るときには収まった長さεの個数にεをかけ，2次元の道の面積を測るときには正方形の枚数にε^2をかけていることになり，s次元のものを測るときにはε^sをかければよいのではないかという推測が成り立つ．この考えを用いてR^d上のs次元ハウスドルフ測度の定義を述べる．

$U_i \subset R^d$に対して，$s = (x_1, \cdots, x_d), y = (y_1, \cdots, y_d)$とし，その直径を

$$d(U_i) = \sup\{d(x, y) : x, y \in U_i\}$$

とする．$U_i (i = 1, 2, \cdots)$が$A \subset R^d$のδ-被覆であるとは$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$であって，しかも$d(U_i) \leq \delta$となるものとする．$0 \leq s \leq d$と$A \subset R^d$に対し

$$H_\delta^s(A) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} d(U_i)^s$$

とする．そして

$$H^s(A) = \lim_{\delta \to 0} H_\delta^s(A)$$

とし，これをR^d上のs次元ハウスドルフ測度とする．

ハウスドルフ測度では適した次元を求めることが問題となってくる．上記した海岸線の長さを測るという考察から，ある集合の測度をハウスドルフ測度を使って測ろうとするとあまり大きな次元のハウスドルフ測度で測っても，$H^s(A) = 0$ となってしまい，小さすぎる次元のハウスドルフ測度では$H^s(A) = \infty$となってしまう．そこでハウスドルフ次元の定義を次に述べる．

$A \subset R^d$に対して

$$\dim_H A = \inf\{s \in [0, \infty) : H^s(A) = 0\}$$

とし，$\dim_H A$をAのハウスドルフ次元という．

ただし，$s > d$ならば$H^s(A) = 0$なので，$A \subset R^d$のハウスドルフ次元は必ず$0 \leq \dim_H A \leq d$となっている．

5　カントル集合の次元と測度

最後にカントル集合とよばれる集合の次元と測度について述べる．カントル集合の幾何的な構成は，区間$I_0 = [0, 1]$からはじめて，その中央の部分$(1/3, 2/3)$を抜き取りI_1とし，I_1を構成している二つの区間に対して，同様にその中央の部分を抜き取りI_2とする．これを繰り返してI_nを作っていき$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$とし，$C$をカントル集合とする．各$I_n$は長さ$3^{-n}$の小区間$2^n$個の合併となっている．その小区間を$I_{n,j} (j = 1, 2, \cdots, 2^n)$とおく．ここでは証明を省くが，このようにして作られるカントル集合の次元は$\log 2 / \log 3$であり，$\log 2 / \log 3$次元で測った場合のカントル集合のハウスドルフ測度は1という結果が得られる．

6　おわりに

この研究を通して，長さ，面積，体積といった測度に対して新たな概念を自分の中に構築することができた．実数次元空間には他にどのような集合が存在するのか，その一般的な定義はどのようにできるのかなど，新たな興味がうまれた．

参考文献

[1] 新井仁之 著, ルベーグ積分講義

[2] 畑政義 著, フラクタル集合の幾何学