

# 磁気浮上システムの安定化制御 最適レギュレータとオブザーバ

2003MM128 吉田 一秀

指導教員: 高見 勲

## 1 はじめに

本研究では、磁気浮上装置の円盤を上部のコイルから電圧をかけて浮上させることにより、不安定な物体を安定化させる制御器の設計を行う。制御手法として最適レギュレータを用いて状態フィードバックを行い磁気浮上装置の安定化を図る。しかし、磁気浮上装置のすべての状態量を観測することはできない。よって同一、最小次元オブザーバの特色をいかし観測できない状態量を推定しその有効性を確かめることにする。

## 2 モデリング

1入出力の磁気浮上システムを制御対象として考える。このシステムを線形化した数学的モデルを次に示す。

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

ただし、各パラメータは下のように入力される。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -128.0814 & -4.0870 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.6434 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

この時、 $x$ は状態変数、 $u$ は操作量、 $y$ は出力を表す[2]。

## 3 最適レギュレータ

最適レギュレータ理論では、状態システムは可制御とし、対 $(A, C)$ は可観測として任意で与えられた重み行列 $Q=Q^T$ 、 $0, R > 0$ に対して、評価関数

$$J = \int (x(t)^T Q x(t) + R u(t)^2) dt \quad (1)$$

を最小化するような状態フィードバックゲイン $K$ を求め、そのフィードバックゲインは唯一に定まり、

$$K = -R^{-1} B P \quad (2)$$

で与えられる。 $P$ はリカッチ方程式

$$P A + A^T P - P B R^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (3)$$

を満足する唯一の正定対称解(すなわち $P = P^T > 0$ )である。本研究においては $Q$ を以下のように与える。

$$Q = \text{diag}[q_1 \ q_2], \quad q_1 \geq 0, q_2 \geq 0$$

## 4 オブザーバ

状態フィードバックは状態量がすべて得られることを前提としているが、すべての状態量を直接観測できるだ

けのセンサをつけることができるとは限らない。このような時に、観測できない状態量を推定するための観測器がオブザーバである。

### 4.1 分離定理

分離定理とは、レギュレータ制御系の設計とオブザーバの設計をそれぞれ独立に行うことができることを示すものである[1]。この定理を使用することにより、複素平面上でレギュレータの極とオブザーバの極を分離して配置することができる。オブザーバの極は、状態フィードバック制御系の極よりも左に配置するのが望ましい(下図)

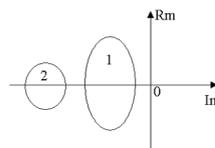


図 1: レギュレータの極とオブザーバの極

1:レギュレータの極

2:オブザーバの極

### 4.2 同次元オブザーバ

推定したい変数を $p$ 次元とし、利用可能な出力を $n$ 次元とした時に $p = n$ の場合を考える。まず、モデルを

$$\dot{z} = Az + Bu \quad (4)$$

$$w = z \quad (5)$$

とおく。 $w$ が状態量 $x$ の推定値である。この方式では推定値 $w$ の真値 $x$ への収束速度は $A$ に依存する。この収束速度を高め、また、安定でない $A$ に対しても適用できるように出力 $y$ とそれに対応するモデルからの推定出力 $Cz$ との偏差にフィードバックゲイン $G$ をかけてモデルに加えると

$$\dot{z} = Az + Bu + G(y - Cz) \quad (6)$$

$$w = z \quad (7)$$

式(6),(7)が同次元オブザーバである。

### 4.3 最小次元オブザーバ

推定したい状態変数は $n$ 次元であり、利用可能な出力が $r$ 次元であるから状態、 $(n - r)$ 次元オブザーバを最小次元オブザーバといい以下のように構成する。

$(n - r) \times n$ 行列 $D$ を任意に選び、 $n \times n$ 行列 $T = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}$ が正則行列になるように $D$ を設定する。

この $T$ より $\bar{x} = Tx$ と状態変数変換を行うと

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u$$

$$y = \bar{C}\bar{x}$$

これに対する

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix} \text{ を決定する。}$$

また、対 $(A, C)$ が可観測なら対 $(\bar{A}_{22}, \bar{A}_{12})$ も可観測であることを示せるので $[\bar{A}_{22} - G\bar{A}_{12}]$ の固有値が目標値どおりになるようオブザーバゲイン $G$ を設定することができる。

$$\text{また } W = T^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-r} \end{bmatrix} \quad V = T^{-1} \begin{bmatrix} I_r \\ G \end{bmatrix} \text{ より}$$

最小次元オブザーバの状態方程式は下式となる。

$$\dot{z} = [\bar{A}_{22} - G\bar{A}_{12}]z + [\bar{A}_{22}G + \bar{A}_{21} - G(\bar{A}_{12}G + \bar{A}_{11})] \quad (8)$$

$$+ [\bar{B}_2 - G\bar{B}_1]u$$

$$w = Wz + Vy \quad (9)$$

## 5 シミュレーション,実験

(1)最適レギュレータにより設計された状態フィードバックを用いてシミュレーション,実験を行った。このときのフィードバックゲイン $K = [-97.927 \quad -9.700]$ とし,重みを $Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix}$ と設定した。これを図2,3に示す。

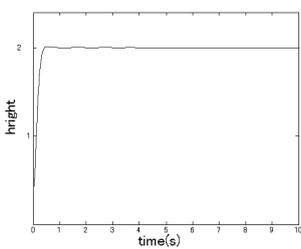


図 2: 最適レギュレータのシミュレーション結果

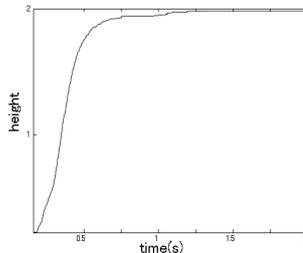


図 3: 最適レギュレータの実験結果

(2)最適レギュレータに同次元オブザーバを導入してシミュレーション,実験を行った。この時のオブザーバゲイン $G$ は $G = \begin{bmatrix} 97.927 \\ 9.700 \end{bmatrix}$ である。これを図4,5に示す。

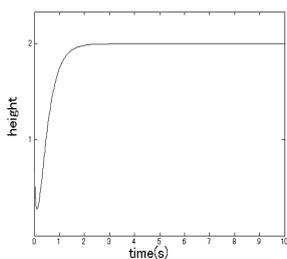


図 4: 同次元オブザーバのシミュレーション結果

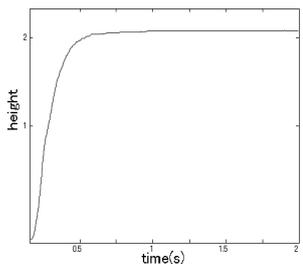


図 5: 同次元オブザーバの実験結果

(3)最適レギュレータに最小次元オブザーバを導入してシミュレーション,実験を行った。オブザーバの極を

$-1, -10, -30, -100$ と任意に指定した。その時のオブザーバゲインはそれぞれ $G = -3.087, G = 5.913, G = 25.913, G = 95.913$ となった。

図6,7には最も結果がよかったオブザーバゲイン $G = 95.913$ の時の波形を示す。

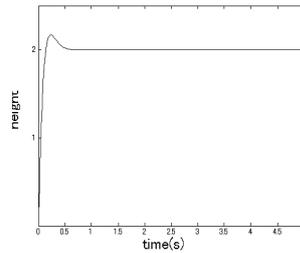


図 6: 最小次元オブザーバのシミュレーション結果

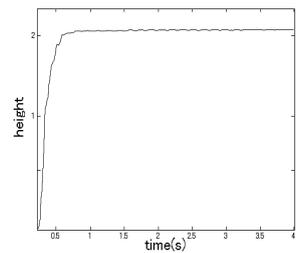


図 7: 最小次元オブザーバの実験結果

## 5.1 シミュレーション,実験結果の比較

共に重みを $Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix}$ とおき磁石の高さを任意の始点から $2\text{cm}$ 浮かせることを目標としてシミュレーション,実験を行った。シミュレーションと実験を比較してみると実験においてはオフセットがが少し残るものの比較的よい結果が得られた。また、このオフセットはスティックスリップといわれる現象であると思われる。また、オブザーバ導入時に着目してみるとレギュレータのみの時と比べても制御性は衰えていないことから分離定理の特性が生かされていることが証明できた。

## 6 おわりに

### 6.1 本研究で得られた成果

- ・最適レギュレータ理論による制御系の設計ができた。
- ・同一、最小次元オブザーバによる状態の推定値を求めることができた。
- ・オブザーバ導入時に分離定理に基づいて極を設定した際,制御性を向上させることができたことから分離定理の証明ができた。
- ・シミュレーション,実験によって最適レギュレータおよび同一、最小次元オブザーバの有効性と安定性を確認することができた。

## 参考文献

- [1] 吉川恒夫,井村順一: 現代制御理論, 昭晃堂(1994).
- [2] 豊田洋輔: ロバスト制御設計に基づく磁気浮上システムの安定化, 南山大学数理情報学部数理科学科卒業論文(2005).
- [3] 岩井善太,石飛光章,川崎義則: 制御工学, 朝倉書店(1999).
- [4] 井上和夫: MATLAB/Simulinkによるわかりやすい制御工学, 森北出版,(2001)