

最適レギュレータによるタンクシステム制御 オブザーバとトラッキング制御

2003MM107 田中 康雄

指導教員: 高見 勲

1 はじめに

本研究では、連結水槽実験装置に対し、制御系設計手法として最適レギュレータを採用することで安定化を図り、制御の有効性を確かめることを目的とする。最適レギュレータとは状態フィードバックの構成となるが、その全ての状態が検出可能であるとは限らない。そこで、測定可能な出力と入力から制御対象の状態を推定する機構が必要となる。そのような推定機構をオブザーバと呼び、それをを用いることによって、より精度の高いコントローラが可能となる。またトラッキング制御を用いることにより、目標値追従制御にも対応できるようにする。

2 制御対象

2.1 状態方程式の導出

制御対象は連結水槽実験装置を選び、状態を結合したSISOシステムを考える。ポンプから水槽1へ水を供給し、水槽1から水槽2へ水を流す。水槽2の水位を定値制御するコントローラを設計する。連結水槽実験装置に対して線形化したモデルの具体的なパラメータは次のとおりである。ポンプ定数を K_m 、ポンプに印加される電圧 V_p 、重力加速度 g 、タンク1,2の管断面積 a_1, a_2 、タンク1,2の断面積を A_1, A_2 、タンク1,2の水位を L_1, L_2 で表すことにする。状態方程式は以下ようになる。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} L1 & L2 \end{bmatrix}^T$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{a_1}{A_1} \sqrt{\frac{g}{2LL_1}} & 0 \\ \frac{a_1}{A_2} \sqrt{\frac{g}{2LL_1}} & -\frac{a_2}{A_2} \sqrt{\frac{g}{2LL_2}} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{K_m}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

ここで、各値に代入し、

$$A = \begin{bmatrix} -0.06564 & 0 \\ 0.06564 & -0.06564 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.2127 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3 制御方法

3.1 最適レギュレータの設計方法

最適レギュレータ理論では、可制御である状態方程式に対して評価関数

$$J = \int (x(t)^T Q x(t) + Ru(t)^2) dt \quad (1)$$

を最小化する状態フィードバックゲイン K を求める。ここで Q は正定または半正定対称行列、 R は正定対称行列でそれぞれは評価の重み行列である。この J を最小にする

最適制御入力は、

$$u(t) = Kx(t) \quad K = -R^{-1}B^T P \quad (2)$$

となる。ここで P はリカッチ方程式

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (3)$$

を満たす唯一の正定対称解である。

4 同次元オブザーバ

状態 $x(t)$ と同一の次元数を持つ状態オブザーバを考える。

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t)) \quad (4)$$

これを直すと

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + Ly(t) + Bu(t) \quad (5)$$

となり、 $A - LC$ が安定行列になるように L を選ぶことができれば、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \hat{x}(t)\| = 0 \quad (6)$$

となり、システムに対する同次元オブザーバとなる。

5 分離定理

分離定理とは、元のシステムとオブザーバを切り離して考えることができる。

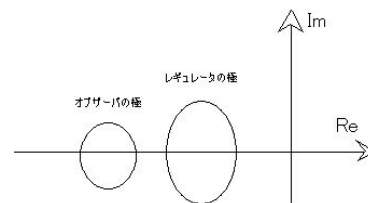


図1: 理想な極の配置

状態フィードバック系の閉ループ極は、レギュレータの極とオブザーバの極の和からなっている。これが、可観測可制御なシステムの場合、これらの極を任意に設定できる。

具体的な配置については、複素平面上でオブザーバの極が、レギュレータの極よりも左側にくることが望ましい(図1)。これは、状態推定誤差をシステムの応答よりも早く0に収束させることによりシステムの応答を遅らせない効果がある。

6 トラッキング制御

本研究においては、2次元の連結水槽実験装置のモデルにトラッキング制御を導入することにより拡大化し、3次元で行う。
新たに次式において考えてみる。

$$\dot{w}(t) = A_1 w(t) + b_1 u_1(t) \quad (7)$$

$$\dot{e}(t) = c_1^T w(t) \quad (8)$$

ただし、

$$w(t) = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ e \end{bmatrix}, u_1(t) = \dot{u}, A_1 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C^T & 0 \end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}, c_1^T = [0, 1] \quad (9)$$

上式に対して前出の最適レギュレータ設計手法を適用すると、実際の制御入力として

$$u(t) = -k_2^T x(t) - k_3 \int_0^t e(t) dt \quad (10)$$

となり、制御誤差に関する積分動作項を含むことがわかる。

7 連結水槽実験装置への適用

これまでに得られた制御系の構成を、連結水槽実験装置にあてはめると以下ようになる。\$q_1\$と\$q_2\$と\$q_3\$は適宜指定とする[1]。

$$Ae = \begin{bmatrix} -0.06564 & 0 & 0 \\ 0.06564 & -0.06564 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, Be = \begin{bmatrix} 0.2127 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$Qe = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 \end{bmatrix}$$

$$R=1$$

なお、ブロック線図は以下ようになる。

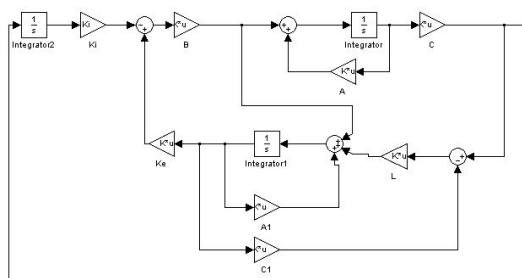


図 2: ブロック線図

8 シミュレーション結果

\$q_1 = 300\$, \$q_2 = 1000\$, \$q_3 = 50\$ といった時最適なシミュレーションが得られた。

$$K = \begin{bmatrix} -17.6505 & -54.5503 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 300 \\ 8 \end{bmatrix}$$

シミュレーションでは、\$L_1, L_2\$にタンクの制御条件として \$0, L_1, L_2, 30[\text{cm}]\$ とし、\$L_1, L_2\$の両方とも目標値を \$0\text{cm}\$

から \$15\text{cm}\$ にステップ状に上げるシミュレーションを行う。その結果を図3,4に示す。

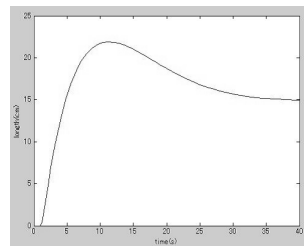


図 3: タンク 1 の水位

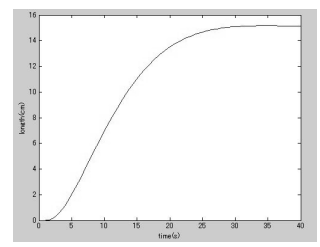


図 4: タンク 2 の水位

このように、制約条件を超えることなくシミュレーションを行うことができた。なお収束の速さは、他のレギュレータの重みを用いてもあまり変わらなかった。

9 実験結果

シミュレーションで用いた \$K, L\$ を使い実験を行う。\$1\text{cm}, 5\text{cm}\$ のステップ応答により、この制御系の制御性を確かめる。その結果を図5,6に示す。なお、図中ノイズが振動したグラフが実験結果、そうでないグラフがシミュレーション結果である。

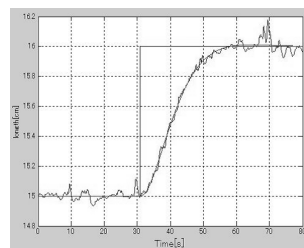


図 5: \$L_2; 1\text{cm}\$ の水位変化

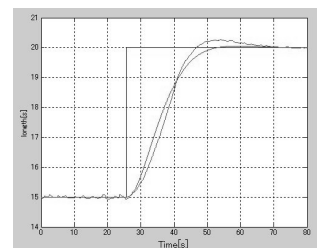


図 6: \$L_2; 5\text{cm}\$ の水位変化

この結果から実験結果はシミュレーション結果に、ほぼ一致しており、理論の妥協性が検証された。最適レギュレータの制御性は有効性が高いことがわかる。

10 おわりに

本研究から得られた成果は以下のとおりである

- ・ポンプシステムのモデリングができるようになった。
- ・最適レギュレータと同一次元オブザーバの設計方法が理解できた。
- ・最適レギュレータ導入時のトラッキング制御方式が理解できた。
- ・実験によるレギュレータの有効性の検証により理論が実証できた。

参考文献

- [1] 岩井義太・石飛光章・川崎義則：制御工学，朝倉書店（1999）。
- [2] 吉川恒夫・井村順一：現代制御論，昭晃堂（1994）。
- [3] 川田昌克・西岡勝博：MATLAB/Simlinkによるわかりやすい制御工学，森北出版（2001）。
- [4] 東方希容子：オブザーバを用いた倒立振子の最適制御，南山大学数理工学部数理科学科（2004）