

極配置によるタンクシステムのI-PD制御

2003MM054 前田純平

指導教員: 高見勲

1 はじめに

PID制御はフィードバック制御の基礎ともなっており、様々な制御手法が開発・提案され続けている。今に至ってもなお産業界では主力の制御手法である。P,I,Dはそれぞれ比例,積分,微分を表しており,偏差や観測値の現在(比例),過去(積分),未来(微分)の情報を操作量に直接反映させることで制御を可能にする。またPIDパラメータ決定方法として極配置法を使用する。システムの応答は極をどこに配置するかで決まってくる。そこで本研究では改良型PID制御であるI-PD制御器を使用し様々な極を指定することによって最適なPIDパラメータを導き,極配置の有用性を検証する。

2 制御対象

2.1 直列タンクシステム

下の図は制御対象の直列タンクシステムである。

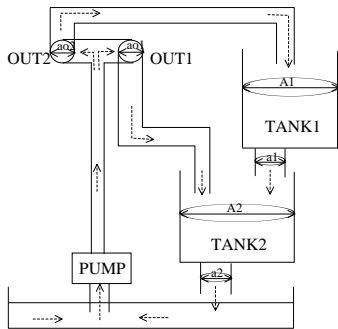


図 1: 直列タンクシステム

直列タンクシステムは1つのポンプと2つのタンクからなっている。縦列関係にある2つのタンクの上をタンク1,下をタンク2とする。ポンプは受け皿から水を垂直に汲み上げ,2つの取り出し口out1とout2へと導く。2つの取り出し口out1とout2は異なる直径をもっている。out1に流れ込んだ水はタンク2へ,out2へ流れ込んだ水はタンク1へと導く。タンク1からの水流はタンク2に流れ込み,タンク2からの水流は受け皿へと流れ込む。ポンプに印加する電圧を調節することにより,タンク2の水位を制御する。

2.2 伝達関数の導出

直列タンクシステムを線形化した数学的モデルは以下に示す通りである。

$$\begin{bmatrix} \dot{L}_1 \\ \dot{L}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{a_1}{A_1} \sqrt{\frac{g}{2L_{10}}} & 0 \\ \frac{a_1}{A_2} \sqrt{\frac{g}{2L_{10}}} & -\frac{a_2}{A_2} \sqrt{\frac{g}{2L_{20}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{a_{02}}{a_{01}+a_{02}} \frac{Km}{A_1} \\ \frac{a_{01}}{a_{01}+a_{02}} \frac{Km}{A_2} \end{bmatrix} V_p \quad (1)$$

a_1 ;TANK1の注ぎ口の面積[cm^2], a_2 ; TANK2の注ぎ口の面積 [cm^2], A_1 ;TANK1の面積[cm^2], A_2 ;TANK2の面積 [cm^2], a_{01} ;OUT1の面積[cm^2], a_{02} ;OUT2の面積 0[cm^2], g ;重力加速度[cm/sec^2], L_{10} ;TANK1の水位の平衡点[cm], L_{20} ;TANK2の水位の平衡点[cm], V_p ;流量定数 [(cm^3/sec)/ $Volt$] とし,(1)の状態方程式をラプラス変換を施し, V_p から L_2 への伝達関数を求めると下式になる。

$$P(s) = \frac{0.189702s + 0.0096062}{s^2 + 0.141837s + 0.00354622} \quad (2)$$

3 制御設計

3.1 I-PD制御と閉ループ伝達関数表現

PIDコントローラは

$$C(s) = \frac{k_P s + k_I + k_D s^2}{s} \quad (3)$$

と表される。比例動作と微分動作を制御量 $y(t)$ のみに働くようにしたI-PD制御器を図2に表す。

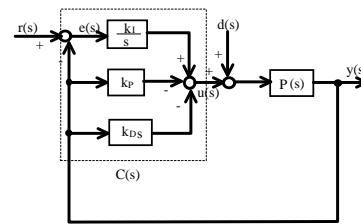


図 2: I-PD制御器

ここでフィードバック制御系の目標値 $r(s)$ から,制御量 $y(s)$ までの閉ループ伝達関数 $W(s)$ と, $P(s)$ を次の式に表す。

$$W(s) = \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)} \quad (4)$$

$$P(s) = \frac{cs + f}{s^2 + as + b} \quad (5)$$

4 極配置と極の性質

4.1 極配置

閉ループ系の極が希望する値となるように k_P, k_I, k_D を決定する。閉ループ系の極とは,閉ループ伝達関数の分母=0(特性方程式という)の根のことである。つまり,

$$1 + C(s)P(s) = 0 \quad (6)$$

$$s^3 + \frac{a+k_D f+k_P c}{1+k_D c} s^2 + \frac{b+k_P f+k_I c}{1+k_D c} s + \frac{k_I f}{1+k_D c} = 0 \quad (7)$$

となる。また,希望する極を s_1, s_2, s_3 とする。分母=0の方程式は

$$(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3) = 0 \quad (8)$$

$$s^3 - (s_1 + s_2 + s_3)s^2 + (s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1)s - s_1 s_2 s_3 = 0 \quad (9)$$

となる。式(7),(9)の係数を比較すると次の式が得られる。

$$k_P = \frac{f(bc(s_1 + s_2 + s_3 + \frac{f}{c}) + (ac - f)(s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3 + \frac{c}{f} s_1 s_2 s_3))}{(f + cs_1)(f + cs_2)(f + cs_3)} \quad (10)$$

$$k_I = \frac{(bc^2 - acf + f^2)s_1 s_2 s_3}{(f + cs_1)(f + cs_2)(f + cs_3)} \quad (11)$$

$$k_D = \frac{cf(s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3 - b) + f^2(a + s_1 + s_2 + s_3) + c^2 s_1 s_2 s_3}{(f + cs_1)(f + cs_2)(f + cs_3)} \quad (12)$$

4.2 特性方程式における極の性質

システムを安定させるには、極の実部が負になるように極指定をする必要がある。また、同時に極はシステムの動的特性を支配する主要な因子でもある。システムの収束の速さは極の実部の絶対値の大ききで決まり、システムの振動周期は極の虚部の絶対値の大ききで決まる。極の実部の絶対値が大きいとシステムは速く収束し、極の虚部の絶対値が大きいと振動は激しくなる。よって、システムの極を指定する場合は、システムを安定させる極を選ぶと同時に、速応性を持たせる極を指定する必要がある。また、二次遅れ系とその極は

$$P(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (13)$$

$$s = -\zeta\omega_n \pm j\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n \quad (14)$$

で表される。 ζ は減衰係数で減衰性を表し、 ω は固有角周波数で速応性を表す。二次遅れ系要素では ζ の値が0.6~1になるように極を指定すれば良い。しかし、三次遅れ要素の場合は極をどのように指定すれば良いかはあまり知られておらず二次遅れ要素よりも三次遅れ要素の極を指定する方が困難である。そこで三次遅れ要素の極とシステムの応答を様々な極 s_1, s_2, s_3 を指定しシミュレーションした結果、出力されたパラメータ k_P, k_I, k_D の一部をまとめたものが表1である。また、様々な極を指定しシミュレーションを行った結果、整定時間[sec]が5秒以内、オーバーシュート量[cm]が0.5cm以内に収まった点をプロットしたのが図3である。整定時間とはシステムの応答が定常値の $\pm 5\%$ に収まるまでにかかる時間であり、オーバーシュート量とは応答の最大ピーク値と定常値との差である。

表 1: s_1, s_2, s_3 を指定した時の k_P, k_I, k_D の値

s_1	s_2	s_3	k_P	k_I	k_D
$-3.1+0.1j$	$-3.1-0.1j$	-0.050644	32.5	51.2	0.05
-3	-3	-0.050644	33.7	51.2	0.42
$-2.8+0.5j$	$-2.8-0.5j$	-0.050644	29.8	43.7	0.16
$-1.3+1.3j$	$-1.3-1.3j$	-0.050654	14.3	19.0	0.36
$-2+1j$	$-2-1j$	-0.050646	30.2	38.3	2.39
$-1+1j$	$-1-1j$	-0.05066	13.4	13.9	1.69
$-1.5+1.5j$	$-1.5-1.5j$	-0.05065	16.5	25.4	0.38
$-3.1+0.1j$	$-3.1-0.1j$	-0.0507	2.60	4.79	-4.7
-0.3	-0.3	-0.05095	8.37	1.33	9.49

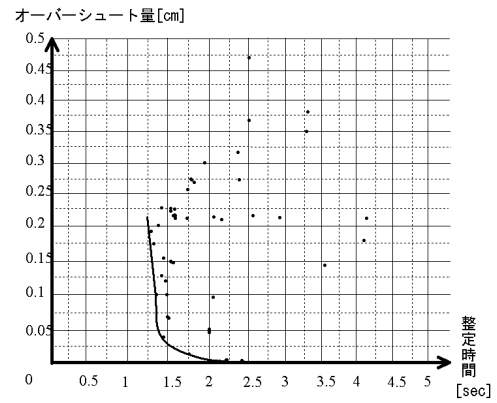


図 3: 整定時間[sec]とオーバーシュート量[cm]

4.3 考察

表1の極 s_1, s_2, s_3 からみても解かると通り s_1, s_2 は極の実部の絶対値が大きくなればなるほど収束時間は速くなるが、 s_3 と大きく関わり、 s_3 を少しでもずらすと、システムの応答が激しく変化することがわかった。また、オーバーシュート量と整定時間は相反する関係にあり、それぞれの最小の点を結んだものが図3の曲線であり、曲線上の点が最適な解を与える。

5 実験結果

図4に実験結果を示す。

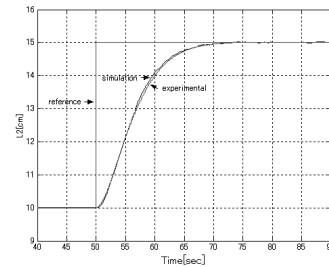


図 4: シミュレーション・実験結果

極を $s_1 = -0.3, s_2 = -0.3, s_3 = -0.05095$ にとり、得られた $k_P = 8.37942, k_I = 1.33651, k_D = 9.48787$ で実験を行った。シミュレーションとほぼ同じような結果が得られた。

6 おわりに

本論文では希望する極を指定することによって一意にPIDパラメータを決定することができ、様々な極 s_1, s_2, s_3 を与えてシミュレーションすることにより、最適なPIDパラメータを決定することができた。また、実験において安定な制御結果が得られ、極配置の有用性を確認することができた。

参考文献

- [1] 連結タンクシステムユーザーマニュアル:
<http://www.pid-control.com>.
- [2] 川田昌克・西岡勝博:MATLAB/Simulinkによるわかりやすい制御工学, 森北出版(2001).