

# フレキシブルアームに対するILQ最適サーボ系設計

2003MM053 久米 洋平

指導教員: 高見 勲

## 1 はじめに

ILQ(InverseLinearQuadratic)設計法[1]とは、最適レギュレータの逆問題を利用した最適サーボ系設計法である。通常の最適レギュレータの設計問題では、まず2次評価関数の重み行列を選定し、つぎにリカッチ方程式を数値的に解いて状態フィードバックゲインを計算する。しかし、重み行列の選定が過渡応答のオーバーシュートや整定時間などの工学的仕様と明確に結びついていない。従って望ましい制御器を得るまでに多くの試行錯誤や反復作業が必要となる。これに対しILQ設計法では、リカッチ方程式を解くことなく、工学的仕様を満たし易い形で最適なゲインを求めることができる。そのため実用上使い易い最適サーボ系設計法となっている。フレキシブルアームに対してこの設計法を用い設計を試みる。

## 2 制御対象

制御対象として1入力1出力のフレキシブルアームを考える。線形化した数学的モデルは以下に示す通りである。

$$\dot{x} = Ax + Bu, x = [\theta \quad \alpha \quad \dot{\theta} \quad \dot{\alpha}]^T \quad (1)$$

$$y = Cx, \quad (2)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\ 0 & 708.8762 & -37.0218 & 0 \\ 0 & -1.1535e+003 & 37.0218 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 65.1134 \\ -65.1134 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \quad (4)$$

ただし、 $x$ は状態量、 $u$ は操作量、 $\theta$ はサーボ負荷ギヤ角度、 $\alpha$ はアームのぶれである。

## 3 最適サーボ系設計

制御対象(1),(2)の出力 $y(t)$ をステップ入力 $r(t)$ に追従させる最適サーボの設計問題を考察する。

周知のように、この問題は $e(t) := r(t) - y(t)$ の積分器を付加した拡大偏差系

$$\dot{x}_e = A_e x_e + B_e u_e, A_e = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}, B_e = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

に対して二次形式評価関数

$$J = \int_0^{\infty} (x_e^T Q x_e + u_e^T R u_e) dt, Q = C_e^T C_e, R > 0 \quad (6)$$

を最小化する最適レギュレータの解

$$u_e = -[K_F \quad K_I] x_e := -K_e x_e \quad (7)$$

として得られる。ブロック線図は以下ようになる。

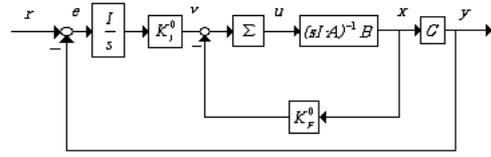


図 1: ILQサーボ系の構成

## 4 ILQ最適サーボ制御設計法

最適制御の逆問題の結果[3]によれば、状態フィードバック(8)が最適制御であるための必要十分条件は、ゲイン $K_e$ に対して適当な正則行列 $V$ と $\Sigma = \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_m\} > 0$ および適当な実行例 $K_F^0, K_I^0$ が存在して

$$K_e = V^{-1} \Sigma V \begin{bmatrix} K_F^0 & K_I^0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$K_F^0 B = I \quad (9)$$

が成立することである。そして、 $K_F^0$ と $K_I^0$ から定まる次の基本ゲイン $K$ を導入する。

$$K = K_F^0 A + K_I^0 C \quad (10)$$

これにより以下のパラメータ行列 $V, \Sigma, K$ を用いたゲイン $K_F, K_I$ の式(12)が得られる[3]。

$$\begin{bmatrix} K_F & K_I \end{bmatrix} = V^{-1} \Sigma V \begin{bmatrix} K & I \end{bmatrix} \Gamma^{-1} \quad (11)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

## 5 制御系パラメータの設定[3]

### 5.1 パラメータ選定の方向性

1. 設計簡略化のため $V = I$ と選定する。
2. 伝達関数行列 $G_{yr}^{\infty}$ が希望の伝達関数行列になるようにゲイン $K$ を定める。なお伝達関数 $G_{yr}^{\infty}$ はパラメータ $\sigma_i (i = 1, \dots, m)$ を無限大にした場合の漸近応答として設計者が指定するものである。
3.  $\Sigma = \sigma I$ と限定して、 $V, K$ に対して、制御則 $K_e$ が最適となる条件を満たす最小の $\sigma_{min}$ を求め、 $\sigma > \sigma_{min}$ となる範囲で $\sigma$ の値を選ぶ。また、 $\sigma$ は $K_F, K_I$ の大きさを調整する役割を持つことからゲイン調整パラメータと呼ばれている。

### 5.2 調整パラメータの下限 $\sigma_{min}$ の計算手順

1. 対称行列 $KB + (KB)^T$ の最大固有値を求め、 $\sigma$ の範囲を次のように決定する。

$$\sigma \in \Sigma_a := \{\sigma > 0 | \sigma > \lambda_{max}[KB + (KB)^T]\} \quad (13)$$

2.  $\sigma \in \Sigma_a$  を一つ選んで次の対称正定行列Eを計算する .

$$E = \sigma I - KB - (KB)^T \quad (14)$$

3. 次の行列Fの固有値を求め、その安定性を判定する .

$$F = A_k + GH \quad (15)$$

$$G = BE^{-1/2}, H = E^{-1/2}KA_k \quad (16)$$

その結果、Fが安定ならば次に進み、不安定ならば手順(2)に戻って $\sigma$ をより大きな値に選びなおす .

4. Hamilton行列

$$\Pi = \begin{bmatrix} F & -GG^T \\ H^TH & -F^T \end{bmatrix} \quad (17)$$

の固有値を求め、それが虚軸上にないかどうかを判定する . その結果、虚軸上に固有値がなければ $\sigma$ の値を減らし、一つでもあれば $\sigma$ の値を増やして手順(2)に戻る . 以上の手順を繰り返して、 $\sigma$ の更新幅が指定された値以下になった時の $\sigma$ を $\sigma_{min}$  とする .

## 6 フレキシブルアームに対するILQサーボ系設計

ここではフレキシブルアームのに対しILQサーボ系設計法を用いて制御系を構成し、シミュレーションの結果を示す . 初めに3節で述べた $\Gamma$ は正則であると確認した . 次に制御対象の相対次数を計算する[1] . フレキシブルアームの相対次数は

$$d_1 = 4 \quad (18)$$

となる . よって4次遅れ系の伝達関数で目標値応答波形を指定できる . そこでゲインKを求めるために必要な行列Dを計算すると

$$D = CA^{d_1-1}B = CA^3B = 656.5709 \quad (19)$$

となる .

指定応答である $G_{yr}^\infty$ を規定する多項式 $\phi_1(s)$ を最も簡単な次の形で与える .

$$G_{yr}^\infty = \text{diag}\left\{\frac{\phi_i(0)}{\phi_i(s)}\right\} \quad (20)$$

$$\phi_1(s) = (s - s_1)^{d_1} \quad (21)$$

ここで $s_i = -1/T_i$ とすれば指定応答として、4次遅れ系の伝達関数

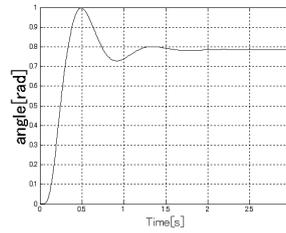
$$\frac{1}{(T_i s + 1)^4} \quad (22)$$

で与えることができる . つまり、そのときの時定数 $T_1$ が設計仕様となる .

## 7 シミュレーションと実験結果

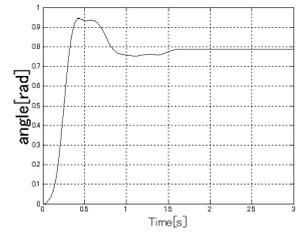
時定数を $T_1 = 0.04$ として設計した時のシミュレーションと実験の結果を示す .

図 2:  $T_1 = 0.04 \sigma = 3$



シミュレーション

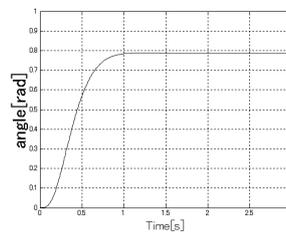
図 3:  $T_1 = 0.04 \sigma = 3$



実験

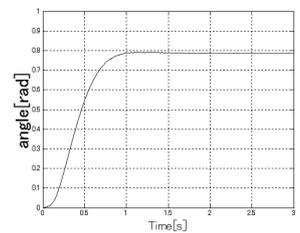
時定数を $T_1 = 0.1$ として設計した時のシミュレーションと実験の結果を示す .

図 4:  $T_1 = 0.1 \sigma = 500$



シミュレーション

図 5:  $T_1 = 0.1 \sigma = 500$



実験

## 8 考察

時定数を $T_1 = 0.01$ から $T_1 = 0.1$ まで変化させていった結果 $T_1 = 0.1$ の時にオーバーシュートをなくすことができた . また の値を高くすることで操作量を増やし目標値に早く追従させることができた . しかし、 を高くしすぎると発散してしまったので目標値に早く追従させかつオーバーシュートをなくすように互いにバランスをとりながら調節していった .

## 9 おわりに

- ILQ設計法を適用したことで重みの選定に悩むことなくゲインを求めることができた .
- フレキシブルアームへの適用において時定数を遅らせることでオーバーシュートをなくすことができ実験によるILQ設計法の有効性を実証できた .
- 目的であったILQ設計法の理論の実証をすることができた .

## 参考文献

- [1] 藤井, 下村: ILQ最適サーボ系設計法の一般化, システム制御情報学会論文誌, Vol.1, No.6, pp.194-203(1988)
- [2] 黒江, 安部, 藤井: 参照入力を一般化したILQサーボ系設計法, 計測自動制御学会論文誌, Vol.32, No.4, pp.539-546(1996)
- [3] 木村英紀, 藤井隆雄, 森武宏: ロバスト制御, コロナ社(1994)