# $H_\infty$標準問題によるアクティブサスペンションの設計

2003MM005 青木 卓也
指導教員: 高見 勲

## 1　はじめに

$H_\infty$標準問題とは，外乱から制御量までの影響を抑制する制御系を構築するための制御理論である．観測量から制御入力に，適切なフィードバックを施すことで，外乱から制御量までの伝達関数の$H_\infty$ノルムを小さくする設計手順を取る。そのノルムが与えられた$\gamma$より小さくなるようにし，$\gamma$が小さければ小さいほど外乱抑制性能が優れていることになる．本研究では，路面変位を外乱，操作性と乗り心地に関する要素を制御量とし，車体の振動を抑制するアクティブサスペンションの設計を目的とし，その有効性をシミュレーションにより検証する．

## 2　アクティブサスペンション

### 2.1　アクティブサスペンションについて

アクティブサスペンションは，動力を用いて外部からの振動と逆位相の力を発生させることによって，より効果的に振動を抑制する装置のことである．実際にも自動車や鉄道などにとりつけられている．本研究では自動車のサスペンションを対象にし，四輪ではなく単輪からなるモデルで検討する．そのモデルを図1に示す．

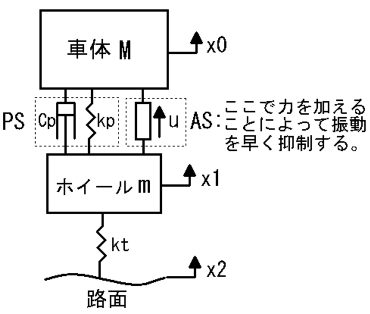


図 1: 1/4車体モデル

### 2.2　運動方程式の導出

図1のモデルにおいて$M$は車体総質量，$m$はホイール質量，$Cp$,$kp$はパッシブサスペンションのダンパ,バネ係数,$kt$はタイヤバネ係数，$x_0$は車体変位，$x_1$はホイール変位,$x_2$は路面変位，$u$はアクティブサスペンションから発生する力である．モデルの運動方程式は次のようになる．

$$M\ddot{x}_0 + Cp(\dot{x}_0 - \dot{x}_1) + kp(x_0 - x_1) = u$$
$$m\ddot{x}_1 + Cp(\dot{x}_1 - \dot{x}_0) + kp(x_1 - x_0) + kt(x_1 - x_2) = -u$$

## 3　制御系設計

### 3.1　定式化

$H_\infty$標準問題において，$x$:状態量，$w$:外乱，$u$:制御入力,$z$:制御量，$y$:観測量とすると，一般化プラント$G(s)$は次のように定式化される[1].

$$\dot{x} = Ax + B_1w + B_2u$$
$$z = C_1x + D_{11}w + D_{12}u$$
$$y = C_2x + D_{21}w + D_{22}u$$
$$z \in R^q, y \in R^p, w \in R^r, u \in R^m$$

ここで状態量，外乱，制御量，観測量をそれぞれ次のようにとった[2].ただし，$x_{ij} = x_i - x_j$とする．

$$x = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \dot{x}_0 & \dot{x}_1 \end{bmatrix}^T, \; w = x_2$$
$$z = \begin{bmatrix} x_{01} & x_{12} & \ddot{x}_0 \end{bmatrix}^T, \; y = \begin{bmatrix} \ddot{x}_0 & \ddot{x}_1 & x_{01} \end{bmatrix}^T$$

制御量$z$は，操作性と乗り心地に関する要素であり，観測量$y$は，センサによって観測できるものとする．

### 3.2　標準問題を解くための条件について

$H_\infty$標準問題の解を求めるには$(A1) \sim (A6)$の仮定を満たす必要がある[1].

$(A1) : (A, B_2)$が可安定，$(C_2, A)$が可検出
$(A2) : \mathrm{rank}D_{12} = m$ ($D_{12}$が列フルランク)
$(A3) : \mathrm{rank}D_{21} = p$ ($D_{21}$が行フルランク)

$$(A4) : \mathrm{rank}\begin{bmatrix} A - j\omega I_n & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} = n + m$$
$$(A5) : \mathrm{rank}\begin{bmatrix} A - j\omega I_n & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} = n + p$$
$$(A6) : D_{22} = 0$$

本研究では仮定$(A3)$と$(A6)$を満たしていないので等価変換する必要があるが，仮定$(A6)$についての変換はリカッチ方程式を解いた後で行う．

仮定$(A3)$を満たすために，仮想外乱を追加し，$D_{21}$を

$$\tilde{D}_{21} = \begin{bmatrix} D_{21} & \epsilon I \end{bmatrix}$$

に変換させる．ここで，$\epsilon$は制御対象に影響を与えないように$1.0 \times 10^{-5}$ とする．

### 3.3　リカッチ方程式を解く[1]

制御量$z$,外乱$w$を再定義して

$$D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \; D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$$

と変換する．次に，$D_{11}$を以下のように分割する．

$$D_{11} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1112} \\ D_{1121} & D_{1122} \end{bmatrix}$$

$$D_{1111} \in R^{(q-m)\times(r-p)}, \; D_{1122} \in R^{m\times p}$$

さらに以下の行列を定義する．

$$D_{1r} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \end{bmatrix}, \; D_{1c} = \begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{21} \end{bmatrix}$$

$$R = D_{1r}^T D_{1r} - \begin{bmatrix} \gamma^2 I_r & 0 \\ 0 & 0_{m\times m} \end{bmatrix}, \; \tilde{R} = D_{1c}^T D_{1c} - \begin{bmatrix} \gamma^2 I_q & 0 \\ 0 & 0_{p\times p} \end{bmatrix}$$

これらを使って次の二つのリカッチ方程式を解き$X,Y$を求める．

$$(A-BR^{-1}D_{1r}^TC_1)^TX+X(A-BR^{-1}D_{1r}^TC_1) \\ -XBR^{-1}B^TX-C_1^T(I-D_{1r}R^{-1}D_{1r}^T)C_1=0 \quad (1)$$

$$(A-B_1D_{1c}^T\tilde{R}^{-1}C)Y+Y(A-B_1D_{1c}^T\tilde{R}^{-1}C)^T \\ -YC^T\tilde{R}^{-1}CY-B_1(I-D_{1c}^T\tilde{R}^{-1}D_{1c})B_1^T=0 \quad (2)$$

そして，リカッチ解を用いてゲイン行列

$$F_I=\begin{bmatrix}F_{11} & F_{12} & F_2\end{bmatrix}^T=-R^{-1}(D_{1r}^TC_1+B^TX)$$

$$H_I=\begin{bmatrix}H_{11} & H_{12} & H_2\end{bmatrix}=-(B_1D_{1c}^T+YC^T)\tilde{R}^{-1}$$

を定義する．

### 3.4 標準$H_\infty$制御問題の解

閉ループ系$F_L(G,K)$を内部安定化し

$$\|F_L(G,K)\|_\infty<\gamma$$

を満足する$H_\infty$コントローラが存在する必要十分条件は次の二つの条件である[1].

1. $\max(\bar{\sigma}\begin{bmatrix}D_{1111} & D_{1112}\end{bmatrix},\bar{\sigma}\begin{bmatrix}D_{1111}^T & D_{1121}^T\end{bmatrix})<\gamma$
2. $X\geq 0, Y\geq 0$ かつ $\rho\begin{bmatrix}X & Y\end{bmatrix}<\gamma^2$

ここで，$F_L(G,K)$は線形分数変換(LFT)と呼ばれるもので，プラント$G$とコントローラ$K$を結合して$w$から$z$への伝達関数を構成する変換のことである．よって，$\|F_L(G,K)\|_\infty$は$w$から$z$への伝達関数の$H_\infty$ノルムを表す．図2にLFTの図表現を示す.

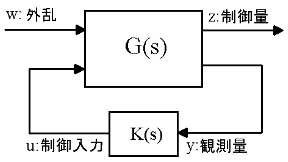


図 2: 線形分数変換(LFT)の図表現

二つの条件を満たすとき，すべての$H_\infty$コントローラ$K(s)$は

$$K=F_L(M,Q)$$

で与えられる．ただし，自由パラメータ$Q$は$\|Q\|_\infty<\gamma$を満たす任意の安定行列である．また，係数行列$M$は

$$M=\left[\begin{array}{c|c}\hat{A} & \hat{B}\\ \hline \hat{C} & \hat{D}\end{array}\right] \quad (3)$$

で与えられる．

ただし，

$$\hat{A}=A+H_IC+\hat{B}_2\hat{D}_{21}^{-1}\hat{C}_1$$

$$\hat{B}=\begin{bmatrix}\hat{B}_1 & \hat{B}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-H_2+\hat{B}_2\hat{D}_{12}^{-1}\hat{D}_{11} & (B_2+H_{12})\hat{D}_{12}\end{bmatrix}$$

$$\hat{C}=\begin{bmatrix}\hat{C}_1\\ \hat{C}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_2Z+\hat{D}_{11}\hat{D}_{21}^{-1}\hat{C}_2\\ -\hat{D}_{21}(C_2+F_{12})Z\end{bmatrix},\ \hat{D}=\begin{bmatrix}\hat{D}_{11} & \hat{D}_{12}\\ \hat{D}_{21} & 0_{3\times 1}\end{bmatrix}$$

$$\hat{D}_{11}=-D_{1121}D_{1111}^T(\gamma^2I_{q-m}-D_{1111}D_{1111}^T)^{-1}D_{1112}-D_{1122}$$

$$\hat{D}_{12}\hat{D}_{12}^T=I_m-D_{1121}(\gamma^2I_{r-p}-D_{1111}^TD_{1111})^{-1}D_{1121}^T$$

$$\hat{D}_{21}^T\hat{D}_{21}=I_p-D_{1121}^T(\gamma^2I_{q-m}D_{1111}D_{1111}^T)^{-1}D_{1112}$$

$$Z=(I_n-\gamma^{-2}YX)$$

本研究では$Q=0$の中心解を用いるので

$$K(s)=\left[\begin{array}{c|c}\hat{A} & \hat{B}_1\\ \hline \hat{C}_1 & \hat{D}_{11}\end{array}\right] \quad (4)$$

となる．また，仮定(A6)の$D_{22}\neq 0$の$H_\infty$コントローラを$\tilde{K}$とすると

$$\tilde{K}=K(I+D_{22}K)^{-1}$$

で求められる[1].

## 4 シミュレーション

図1のモデルに関して，各パラメータの値を以下のように設定した．

$M$=400[kg],$m$=40[kg],$C_p$=2000[Ns/m],$k_p$=35000[N/m]
$k_t$=250000[N/m]

その結果，本研究で求めた$\gamma$は4.5となった．

次に，路面に0.03mの大きさのパルス信号を入力したシミュレーションを行った．そのときの車体変位の様子を図3に示す.

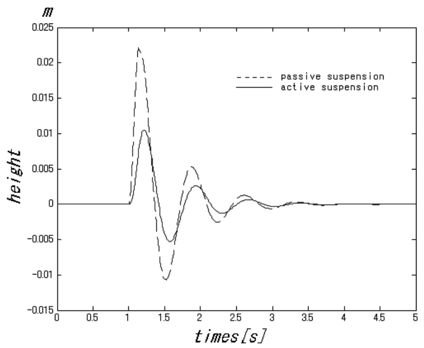


図 3: シミュレーション結果

## 5 おわりに

本研究では$H_\infty$標準問題を解くことによって，振動抑制を目的としたアクティブサスペンションのコントローラを求めた．そして，シミュレーションによって従来のパッシブサスペンションに比べて振動が抑制されていることから，その有効性を確認することができた．

$H_\infty$標準問題は，解くための条件を満たすことが必要であり，かつ二つのリカッチ方程式の解が存在しなければならない．また，コントローラを求めるまでには複雑な計算を要することが分かった．今後の課題として，$H_\infty$標準問題より，計算の効率という点で優れているLMI法に基づいて設計する．

## 参考文献

[1] 藤森篤：ロバスト制御, コロナ社 (2001).

[2] 川谷亮治, 山下勝司, 藤森一雄, 木村英紀: $H\infty$制御理論に基づくアクティブサスペンションの制御, 計測自動制御学会論文集,Vol.27, No.5, pp.554-561 (1991).