仕組債の評価について
— 日経デジタル債 —

2003MM046 河本 真悠子
指導教員: 澤木 勝茂

1 はじめに

日経デジタル債とは払込・クーポン・償還金ともに円で, 日経平均株価があらかじめ定められた一定値以上であるか, 未満であるかに依存して2通りのクーポンに分かれる債券である. クーポン決定日に, 日経平均株価が当初設定される水準(トリガー)以上となった場合, 当該利用日に円貨100%で早期償還される. 本研究ではこの日経デジタル債についての評価をおこなう.

2 モデルの定式化

連続時間モデルの場合, 時刻tでの株価をS_tとする. S_tは確率微分方程式

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t \tag{1}$$

にしたがうとする. ただしrは利子率, σはボラティリティ, $\tilde{W}_t$はリスク中立確率Qの下での標準ブラウン運動である. このとき, 満期をT, 額面価格をF, 指定の閾値をK, トリガーをBとする. クーポン率は$S_T \geq S_0 - K$の場合α, $S_T < S_0 - K$の場合β(ただし$S_0 > K, \beta < \alpha$)とする. ここでは償還はないという仮定の下での価格評価をおこなう.

3 クーポン支払いが満期において１回限りのデジタル債

ブラック・ショールズモデルを用いて価格式を導出する. クーポンは満期において1回のみであることより, この債券の満期Tでのペイオフは

$$F + (\alpha 1_{\{S_T \geq S_0 - K\}} + \beta 1_{\{S_T < S_0 - K\}})F \tag{2}$$

で与えられる. したがって, クーポンは満期において1回のみなので, $t = 0$でのこの債券の価格$V(S_0, 0)$は上記のペイオフを利子率で割り引いて, リスク中立確率Qにおいて期待値をとったものであるので

$$\begin{aligned} V(S_0, 0) = e^{-rT} E_Q[&F \\ &+ F(\alpha 1_{\{S_T \geq S_0 - K\}} + \beta 1_{\{S_T < S_0 - K\}})] \end{aligned} \tag{3}$$

となる. 確率微分方程式(1)を解くと,

$$S_T = S_0 \exp\left(\sigma \tilde{W}_T + (r - \frac{\sigma^2}{2})T\right)$$

を得る. 確率変数Zを

$$Z = \sigma \tilde{W}_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T$$

とおくとZはリスク中立確率Qの下で正規分布$N\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 T, \sigma^2 T\right)$にしたがう確率変数である. よって

$$\begin{aligned} V(S_0, 0) &= e^{-rT}\{F + \alpha F E[1_{\{S_0 e^{Z - rT} \geq S_0 - K\}}] \\ &\quad + \beta F E[1_{\{S_0 e^{Z - rT} < S_0 - K\}}]\} \\ &= e^{-rT} F\{1 + \alpha \Phi(d_1) + \beta \Phi(-d_1)\} \end{aligned} \tag{4}$$

となる. ただし, $\Phi(x)$は標準正規分布の分布関数である. また

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\log\left(\frac{S_0}{S_0 - K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right) \tag{5}$$

である. 解析解を株価S_0で1階微分すると,

$$\frac{\partial V}{\partial S_0} = -e^{-rT}(\alpha - \beta)\frac{F}{\sigma\sqrt{T}}\frac{K}{S_0(S_0 - K)}\phi(d_1) < 0 \tag{6}$$

となる. ここで具体的な数値を用いて, 解析的性質を考察する. なお, ここで用いる数値例は$S_0 = 500$, $K = 100$, $B = 600$, $r = 0.01$, $\sigma = 0.10$, $t_c = 0.50$, $T = 1$, $\alpha = 0.10$, $\beta = 0.001$, $F = 100$とする. 株価S_0の変化による価格$V(S_0, 0)$の変化度合を図1で表す.

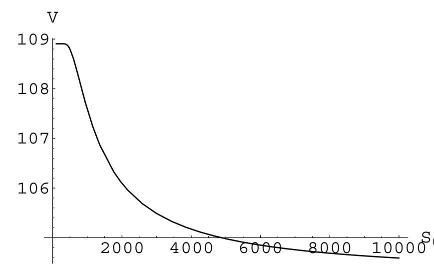

図 1: $V(S_0, 0)$のグラフ

以上の図より, 単調非増加であることがわかる. したがって株価が高ければ高いほど, 日経平均株価終値は定められた一定値未満になり, より低いクーポン率のクーポンを受け取る確率が高くなるので, 価格は低くなる.

4 クーポンが複数回(２回)あるデジタル債

クーポンを残存期間中のクーポン支払い日に複数回, そして満期においてクーポンと額面価格を受け取るモデルを考える. まずクーポン支払い日が$t_c(< T)$と満期の２回ある場合の価格式を導出する. 価格式は,

$$\begin{aligned} V(S_0, 0) &= e^{-rt_c} E_Q[F(\alpha 1_{\{S_{t_c} \geq S_0 - K\}} + \beta 1_{\{S_{t_c} < S_0 - K\}})] \\ &\quad + e^{-rT} \\ &\qquad E_Q[F + F(\alpha 1_{\{S_T \geq S_0 - K\}} + \beta 1_{\{S_T < S_0 - K\}})] \\ &= e^{-rt_c} F\{\alpha \Phi(d_2) + \beta \Phi(-d_2)\} \\ &\quad + e^{-rT} F\{1 + \alpha \Phi(d_1) + \beta \Phi(-d_1)\} \end{aligned} \tag{7}$$

$$d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{t_c}}\left(\log\left(\frac{S_0}{S_0 - K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t_c\right) \tag{8}$$

となる. したがって, クーポンがn回の場合の価格式は,

$$V(S_0, 0) = e^{-rT} F + E_Q\left[\sum_{i=1}^{n} F e^{-rt_i}\right.$$

$$\times\left(\alpha 1_{\{S_{t_i}\geq S_0-K\}}+\beta 1_{\{S_{t_i}<S_0-K\}}\right)\Bigg] \quad (9)$$

となる．

5　クーポン支払いが満期において１回限りのトリガー付きデジタル債(参照日判定タイプ)

株価参照日において, 株価がある一定の水準を超えるとクーポン支払いがおこなわれないモデルを考える．株価参照日とクーポン支払い日は同じ日(満期)とする．この債券の満期Tでのペイオフは

$$F+(\alpha 1_{\{S_T\geq S_0-K\}}+\beta 1_{\{S_T<S_0-K\}})F1_{\{S_T\leq B\}} \quad (10)$$

で与えられる．よって価格式は

$$\begin{aligned} V(S_0,0) &= e^{-rT}FE_Q[1 \\ &\quad +(\alpha 1_{\{S_T\geq S_0-K\}}+\beta 1_{\{S_T<S_0-K\}})1_{\{S_T\leq B\}}] \\ &= e^{-rT} \\ &\quad \times F[\alpha\{\Phi(d_3)-\Phi(-d_1)\}+\beta\Phi(d_4)+1] \quad (11) \end{aligned}$$

となる．ただし

$$\begin{aligned} d_3 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\log\left(\frac{B}{S_0}\right)-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right) \quad (12) \\ d_4 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\log\left(\frac{m}{S_0}\right)-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right) \quad (13) \\ m &= \min\{S_0-K,B\} \end{aligned}$$

である．解析解を株価S_0で1階微分すると,
(i)$m=S_0-K$のとき

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial S_0} &= e^{-rT}F\frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \\ &\quad \left[\alpha\left(\frac{-1}{S_0}\phi(d_3)-\left(\frac{1}{S_0-K}-\frac{1}{S_0}\right)\phi(d_1)\right)\right. \\ &\quad \left.+\beta\left(\left(\frac{1}{S_0-K}\right)-\frac{1}{S_0}\right)\phi(d_4)\right] \quad (14) \end{aligned}$$

(ii)$m=B$のとき

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial S_0} &= e^{-rT}F\frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \\ &\quad \left[\alpha\left(\frac{-1}{S_0}\phi(d_3)-\left(\frac{1}{S_0-K}-\frac{1}{S_0}\right)\phi(d_1)\right)\right. \\ &\quad \left.-\beta\left(\frac{1}{S_0}\right)\phi(d_4)\right] \quad (15) \end{aligned}$$

を得る．株価S_0の変化による価格Vの変化度合を図2で表す．

図2より価格は株価S_0に関して単調非増加であることがわかる．したがって株価が高ければ高いほど, 日経平均株価終値は定められた一定値未満になり, より低いクーポン率のクーポンを受け取る確率が高くなるので, 価格は低くなる．

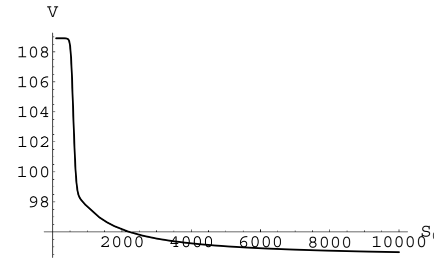

図 2: $V(S_0,0)$のグラフ

6　クーポン支払いが満期において１回限りのトリガー付きデジタル債(ルックバックタイプ)

デジタル債の残存期間中において, 株価がある一定の水準を超えるとクーポン支払いがおこなわれないモデルを考える．価格式の導出はブラウン運動に関しての性質, 特にその反射原理を利用する．この債券の満期Tでのペイオフは

$$F+(\alpha 1_{\{S_T\geq S_0-K\}}+\beta 1_{\{S_T<S_0-K\}})F1_{\hat{S}_T\leq B} \quad (16)$$

で与えられる．ただし,

$$\hat{S}_T=\max_{0\leq t\leq T}S_t$$

である．よって価格式は

$$\begin{aligned} V(S_0,0) &= e^{-rT}FE_Q[1 \\ &\quad +(\alpha 1_{\{S_T\geq S_0-K\}}+\beta 1_{\{S_T<S_0-K\}})1_{\hat{S}_T\leq B}] \\ &= e^{-rT}F\left[\alpha\left\{\Phi(d_3)-\Phi(-d_1)\right.\right. \\ &\quad \left.-\left(\frac{B}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\Phi(d_5)-\Phi(d_6)\right\} \\ &\quad -\beta\left\{\Phi(d_3)-\left(\frac{B}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\Phi(d_5)+2\right. \\ &\quad \left.\left.-\Phi(-d_1)-2\Phi(-d_3)-\Phi(d_7)\right\}+1\right] \quad (17) \end{aligned}$$

となる．ただし,

$$\begin{aligned} d_5 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\log\left(\frac{S_0}{B}\right)-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right) \quad (18) \\ d_6 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\log\left(\frac{S_0(S_0-K)}{B^2}\right)-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right) \quad (19) \\ d_7 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\log\left(\frac{B^2}{S_0(S_0-K)}\right)-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right) \quad (20) \end{aligned}$$

である．

参考文献

[1] ドージェ・ブローディ：現代ファイナンス数理, 日本評論社 (2000).

[2] 堀田 雅文：パワー・リバース・デュアル・カレンシー債の評価とその数値計算, 南山大学大学院数理情報研究科数理情報専攻数理情報学修士論文, (2006).

[3] 森平爽一郎, 小島裕：コンピュテーショナル・ファイナンス, 朝倉書店(1997).