効用関数におけるポートフォリオ選択理論

2003MM002 秋吉尚多　2003MM029 伊藤正明

指導教員:澤木勝茂

1 はじめに

年金システムの崩壊，社会保険費用などの負担増などで，401Kに代表されるようにこれからは確実に自分で資産を運用する時代である．現在の日本の銀行預金は低金利であり，金利がほとんどつかない銀行預金よりも，リスクを伴うが，利回りの高い金融商品に注目が集まっている．こうした結果，企業間の競争を促し，結果として金利やサービスなどで消費者の選択の幅が広がった．そのため投資家の資産運用はより多様に，より複雑化してきたといえる．以上のことから投資家の資産配分(ポートフォリオ選択)というものは大変興味深い問題である．

本研究では資料[3]による株式市場を産業別・業種別に分類した月間投資収益率から，時刻tにおける最適資産配分を求め，その年ごとの国内外の経済状況と照らし合わせることによって，最適資産配分の実証的妥当性を考察する．

2 確率過程と伊藤の定理

本研究で用いる確率過程, 連続時間の下での最適消費・最適ポートフォリオ選択問題において確率微分方程式を解く際に必要となる伊藤の定理については卒業論文にのせることにする.

3 連続時間の下での動的計画法

連続時間の下での消費・ポートフォリオ選択問題などファイナンスの連続時間モデルで使われる動的計画法について説明する．

あるシステムの状態変数

$$X(t) = (X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t))$$

が確率微分方程式によって記述され，時刻tにおける資産iへの投資比率を$y_i(t)$で表す．$u(x,y,t)$を時刻tでの瞬間的効用関数，$B(x,T)$を期末での(遺産)効用関数とする．問題は，$X(t)$の確率ダイナミックスが

$$dX_i(t) = a_i(t)dt + b_i(t)dZ_i(t) \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

で与えられた場合の期待効用

$$E\left[\int_0^T u(X(t), y(t), t)dt + B(X(T), T) \mid X(0) = x_0\right]$$

を最大にするような制御変数$y(t)$を求めることである．十分小さい時間dtに対して，連続時間の下での最大期待効用$V(x,t)$は,

$V(x,t) =$

$$\max_{y(t)} E\left\{\int_t^{t+dt} u(X(\tau), y(\tau), \tau)d\tau + V(X(t+dt), t+dt)\right\}$$

$$= \max_{y(t)} E\left[u(X(t), y(t), t)dt + V(X(t+dt), t+dt)\right]$$

となる．ただし$dV = V(X(t+dt), t+dt) - V(x,t)$と定義する．上記の$V$は最適方程式

$$0 = \max_{y(t)}\left[u(x, y(t), t) + \frac{1}{dt}E(dV)\right]$$

を満足する．確率微分方程式によって与えられる確率過程$\{X(t); 0 \le t \le T\}$ の上で定義された関数$V(x,t)$の時間に関する変化率を考えるために，次の式を定義する．

$$D_x\left[V(x,t)\right] \equiv \lim_{h\to 0} E_t\left[\frac{dV}{h}\right].$$

ここで，$dV = V(X(t+h), t+h) - V(x(t), t)$で定義する．最適方程式は

$$\max_{y(t)}\{u(x, y(t), t) + D_x\left[V(x,t)\right]\} = 0 \tag{1}$$

である．これを解くことにより，最適資産配分を求める．

4 連続時間の下での最適消費と最適資産配分モデル

4.1 確率過程が対数ウィナー過程に従う場合 モデル1

時刻tで個人(投資家)は富$W(t)$が所与の下で単位時間当たり$C(t)$の率で消費し，資産iの購入量$N_i(t)$を決定する．資産iの価格$X_i(t)$は次の確率微分方程式にしたがう．

$$\frac{dX_i(t)}{X_i(t)} = a_i(X,t)dt + b_i(X,t)dZ_i(t) \tag{2}$$
$$i = 1,2,\ldots,n.$$

最適方程式

$$\max_{C(t),y(t)}\{u(C(t),t) + D_{w,x}\left[V(w,x,t)\right]\} = 0 \tag{3}$$

を$\sum_{i=1}^n y_i(t) = 1$の下で最適化問題を解くためにラグランジュ関数$L(C,y,\lambda)$を

$$L(C,y,\lambda) = U(C,t) + D_{w,x}\left[V\right] + \lambda(1 - \sum_{i=1}^n y_i) \tag{4}$$

と定義すれば，最適性の1階の条件より次の等式を得る．

$$\frac{\partial L}{\partial C} = \frac{\partial U}{\partial C} - V_w = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} = W^2 V_{ww}\sum_{j=1}^n \sigma_{ij} y_i(t) + W_{a_i} V_w$$
$$+W\sum_{j=1}^n x_j(t)\sigma_{ij}V_{jw} - \lambda = 0,$$
$$i = 1,2,\ldots,n,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - \sum_{i=1}^{n} y_i(t) = 0. \tag{6}$$

上式から，消費の限界効用と富の限界効用とが各時刻で等しくなるような消費が選択されること，最適資産配分は明示的には時間に依存しないことがわかる．

4.2 確率過程がより一般的な場合 モデル２

$X_i(t)$は次の確率微分方程式にしたがう．

$$\frac{dX_i(t)}{X_i(t-)} = a_i(t)dt + b_i(t)dZ_i(t) + \sum_{k=-m}^{m} \beta_{ik} dN_{ik}(t)$$

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

$X_i(t-)$は左からの極限を意味する．最後の項である$N_{ik}(t)$は時間$[0,t]$の間で起こった幅β_{ik}の価格変化の回数を表す点過程である．ただし，β_{ik}は価格変化の幅である．ここでの問題は

$$\sup_{C(t),y(t)} E\left[\int_0^T U(C(t),t)dt + B(W(T))\right]$$

となる消費と資産配分の組$\{C(t), y(t), 0 \le t \le T\}$ を求めることである．最適方程式は

$$\sup\{D_w V[w,t] + U(C(t),t)\} = 0 \tag{7}$$

と表される．最適消費と最適資産配分の明示的な解を求めるため効用関数と遺産関数を特定化する．

4.2.1 効用関数・遺産関数

本研究では，さまざまな効用関数に対して詳しい分析をおこなう．

(I) 対数効用関数

$$U(C(t),t) = \log C(t), B(W(T)) = \log W(T)$$

(II) 指数効用関数

$$U(C(t),t) = e^{-\alpha C(t)}, B(W(T)) = e^{-\alpha W(T)}$$

(III) ベキ効用関数

$$U(C(t),t) = C(t)^{2\alpha}, B(W(T)) = W(T)^{2\alpha}$$

まず，資産価格の確率過程からジャンプの項を除去してβ_{ik}とすると，$D_w V[w,t]$は次のように求めることができる．

$$\begin{aligned} dV = V_t dt &+ V_w \left(\sum_{i=1}^{n} y_i(t)W(t-)a_i - C(t)\right) dt \\ &+ V_w \sum_{i=1}^{n} y_i(t)W(t-)b_i dZ_i(t) \\ &+ \frac{1}{2} V_{ww} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i(t)W(t-)b_i\right)^2 dt, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} D_{wx}[V] = V_t &+ V_w \left(\sum_{i=1}^{n} y_i(t)W(t)a_i - C(t)\right) \\ &+ \frac{1}{2} V_{ww} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i(t)W(t)b_i\right)^2. \end{aligned} \tag{9}$$

(7)式の{ }の中を$f(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t), C(t))$とおくと，

(I) $U(C(t),t) = \log C(t), B(W(T)) = \log W(T)$の場合

$$\begin{aligned} &f(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t), C(t)) = \\ &\quad V_t + V_w \sum_{i=1}^{n} y_i(t)W(t)a_i - V_w C(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} V_{ww} \sum_{i=1}^{n} {y_i}^2(t) W(t)^2 {b_i}^2 + \log C(t) \end{aligned} \tag{10}$$

(II) $U(C(t),t) = e^{-\alpha C(t)}, B(W(T)) = e^{-\alpha W(T)}$の場合

$$\begin{aligned} &f(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t), C(t)) = \\ &\quad V_t + V_w \sum_{i=1}^{n} y_i(t)W(t)a_i - V_w C(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} V_{ww} \sum_{i=1}^{n} {y_i}^2(t) W(t)^2 {b_i}^2 + e^{-\alpha C(t)} \end{aligned} \tag{11}$$

(III) $U(C(t) = C(t)^{2\alpha}, B(W(T)) = W(T)^{2\alpha}$の場合

$$\begin{aligned} &f(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t), C(t)) = \\ &\quad V_t + V_w \sum_{i=1}^{n} y_i(t)W(t)a_i - V_w C(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} V_{ww} \sum_{i=1}^{n} {y_i}^2(t) W(t)^2 {b_i}^2 + C(t)^{2\alpha} \end{aligned} \tag{12}$$

と表すことが出来る．境界条件$V(W,T) = B(W)$と資産配分の制約条件$\sum_{i=1}^{n} y_i(t) = 1$の下で最適化問題を解くために，ラグランジェ関数$L$を

$$L(y(t), C(t), \lambda) = f(y(t), C(t)) + \lambda(1 - \sum_{i=1}^{n} y_i(t))$$

とおくと，1階の最適性の条件により，次の等式を得る．

$$\frac{\partial L}{\partial y_i(t)} = V_w W(t) a_i + V_{ww} W(t)^2 y_i(t) {b_i}^2 - \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0.$$

これらを用いると最適ポートフォリオ$y_i(t)$は以下のように表される．

$$\begin{aligned} y_i(t) = \frac{b_i^{-2}}{\sum_{j=1}^{n} b_j^{-2}} &+ \frac{V_w}{V_{ww}W(t)} \cdot \frac{\sum_{j=1}^{n} a_j b_j^{-2}}{b_i^2 \sum_{j=1}^{n} b_j^{-2}} \\ &- \frac{V_w}{V_{ww}W(t)} \cdot \frac{a_i}{b_i^2}. \end{aligned} \tag{13}$$

$\frac{V_w}{V_{ww}W(t)}$を計算すると，最適ポートフォリオ$y_i(t)$を示す式は以下のように表される．

(I) 対数効用関数

$U(C(t),t) = \log C(t), B(W(T)) = \log W(T)$の場合

(i) $V(W,T) = \log W \cdot F(t)$,

(ii) $V(W,T) = \log W + F(t)$ともに

$$y_i^* = \frac{b_i^{-2}}{\sum_{j=1}^{n} b_j^{-2}} - \frac{\sum_{j=1}^{n} a_j b_j^{-2}}{b_i^2 \sum_{j=1}^{n} b_j^{-2}} + \frac{a_i}{b_i^2} \tag{14}$$

(Ⅱ) 指数効用関数

$U(C(t),t) = -e^{-\alpha C(t)}, B(W(T)) = -e^{-\alpha W(T)}$の場合
(i) $V(W,T) = -e^{-\alpha C(t)} \cdot F(t)$,
(ii) $V(W,T) = -e^{-\alpha C(t)} + F(t)$ともに

$$y_i^* = \frac{b_i^{-2}}{\sum_{j=1}^n b_j^{-2}} - \frac{1}{\alpha W} \cdot \frac{\sum_{j=1}^n a_j b_j^{-2}}{b_i^2 \sum_{j=1}^n b_j^{-2}} + \frac{1}{\alpha W} \cdot \frac{a_i}{b_i^2} \quad (15)$$

(ii) $V(W,T) = -e^{-\alpha C(t)} + F(t)$

(Ⅲ) ベキ効用関数

$U(C(t) = C(t)^{2\alpha}, B(W(T)) = W(T)^{2\alpha}$の場合
(i) $V(W,T) = W^{\alpha} \cdot F(t)$,
(ii) $V(W,T) = W^{\alpha} + F(t)$ともに

$$y_i^* = \frac{b_i^{-2}}{\sum_{j=1}^n b_j^{-2}} + \frac{1}{2\alpha - 1} \cdot \frac{\sum_{j=1}^n a_j b_j^{-2}}{b_i^2 \sum_{j=1}^n b_j^{-2}} - \frac{1}{2\alpha - 1} \cdot \frac{a_i}{b_i^2} \quad (16)$$

(14)式，(15)式，(16)式より最大期待効用と$F(t)$の関係が積の形も和の形のときも求めるポートフォリオの形が同じになることがわかる．(I)(i)，(ii)式は，a_i，b_iを代入すれば，最適ポートフォリオの明示解が得られる．しかし，(Ⅱ)(i)，(ii)，(Ⅲ)はα，W，a_i，b_iを代入して考察する．

4.2.2 最適消費

次に，最適消費を求める．

(I) 対数効用関数

(i)，(ii)のとき
$C(t) = 0$より$C^*(t) = 0$となるので,消費を全くしないことになる．

(Ⅱ) 指数効用関数

(i)のとき$F(T) = 1$より，最適消費は

$$\begin{aligned} C^*(t) &= -\frac{1}{\alpha} \log \left(\frac{V_w}{\alpha} \right) \\ &= -\frac{1}{\alpha} \log \left(e^{-\alpha W} \cdot F(t) \right) \\ &= W(t) - \frac{1}{\alpha} e^{T-t} \int_t^T q(\tau) e^{-(T-\tau)} d\tau \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q(t) = -\sum_{i=1}^n y_i(t) W a_i + \frac{1}{2} \alpha^2 \sum_{i=1}^n y_i^2(t) W^2 b_i^2 \\ + \alpha W + 1 \end{aligned}$$

で表される．この式から，消費は資産$W(t)$の一次関数で表され$q(t)$が大きくなるとき減少することが分かる．
(ii)のとき，最適消費は

$$\begin{aligned} C^*(t) &= -\frac{1}{\alpha} \log \left(\frac{V_w}{\alpha} \right) \\ &= W(t) \quad (18) \end{aligned}$$

で表される．この式から，資産を常にすべて消費することがわかる．

(Ⅲ) ベキ効用関数

(i)のとき,$F(T) = 1$より，最適消費は

$$\begin{aligned} C^*(t) &= \left(\frac{V_w}{2\alpha} \right)^{\frac{-1}{1-2\alpha}} \\ &= W(t) F(t)^{\frac{-1}{1-2\alpha}} \\ &= \frac{W(t)}{\exp\left\{ -\int_t^T \frac{1}{1-2\alpha} q(s) ds \right\} + \int_t^T \exp\left\{ -\int_t^s \frac{1}{1-2\alpha} q(\tau) d\tau \right\} ds} \end{aligned} \quad (19)$$

$$q(t) = 2\alpha \sum_{i=1}^n y_i^*(t) a_i + \alpha(2\alpha - 1) \sum_{i=1}^n y_i^{*2}(t) b_i^2$$

で表される．この式から，消費$C(t)$は資産$W(t)$に比例し，$q(t)$が大きくなるとき消費$C(t)$が増えることが分かる．
(ii)のとき，最適消費は

$$\begin{aligned} C^*(t) &= \left(\frac{V_w}{2\alpha} \right)^{\frac{-1}{1-2\alpha}} \\ &= W(t) \quad (20) \end{aligned}$$

で表される．この式から，資産を常にすべて消費することがわかる．

5 結果と考察

前節で得た最適ポートフォリオの式に，月間投資収益率(東証一部33業種)から計算した平均と標準偏差を代入し，1年ごとの最適資産配分を求める．本論文では, 1995年から2005年の11年間のデータを使用し，それぞれ考察した．（ここでは1997年度の考察のみ載せておく．）

5.1 実証結果

(I)対数効用関数，(Ⅲ)ベキ効用関数における業種別の最適ポートフォリオと時価総額の構成比を表1に示す．また，(Ⅱ)指数効用関数における業種別の最適ポートフォリオのグラフを図１に示し，効用関数別に，各業種別時価総額の構成比とポートフォリオの差の絶対値の総和を表2に示す.

5.2 考察

表1より，実際の投資状況とモデルとの比較する．1997年は景気の下降，4月からの消費税引上げによる個人消費の低迷，さらにアジア通貨危機が始まるなどの影響を受け，投資を控える傾向が顕著に見られた．

消費税引き上げにより住宅取得価格を引き上げ住宅取得能力を低下が懸念されるが，所得税・個人住民税の制度減税や住宅取得促進税制の拡充により相殺される形となり，さらにローン金利が0.1%低下すれば，住宅取得能力はむしろ税制・金利変更前より上昇する．こうしたことから，低金利と住宅価格の安定が続けば住宅建設は底堅く推移するものとみられるのでモデルでは危険愛好的な投資家で「3. 建設業」で投資比率が高くなるという結果になっている．

また，この年の経済状況を見ると，北海道拓殖銀行，山

表 1: 1997年における最適資産配分

平均 標準偏差	業種	$\log C(t)$	$[C(t)]^{2\alpha}$ $(\alpha=0.1)$	$[C(t)]^{2\alpha}$ $(\alpha=0.9)$	時価総額の%
−5.325 8.28867	1.水産農林業	−0.04103	−0.0536	0.081182	0.000579
−5.99167 6.876899	2.鉱業	−0.07239	−0.09549	0.135556	0.000497
−5.9 6.652682	3.建設業	−0.07528	−0.09945	0.142259	0.038764
−1.46667 4.453667	4.食料品	0.055536	0.057481	0.038035	0.023736
−3.31667 6.353501	5.繊維製品	−0.01854	−0.02904	0.075976	0.021387
−2.26667 6.30488	6.紙・パルプ	0.007586	0.003526	0.044135	0.007179
−1.725 5.299936	7.化学	0.03002	0.029094	0.038355	0.052732
0.158333 5.226933	8.医薬品	0.099798	0.11608	−0.04673	0.020804
−3.725 9.56605	9.石油 ・石炭製品	−0.01264	−0.01839	−0.39093	0.016573
0.7 5.839053	10.ゴム製品	0.095858	0.112877	−0.05731	0.014259
−3.925 7.487581	11.ガラス ・土石製品	−0.0242	−0.003447	0.068268	0.014588
−5.33333 8.088076	12.鉄鋼	−0.04227	−0.05646	0.085418	0.051624
−1.75 5.562455	13.非鉄金属	0.026445	0.025403	0.03583	0.036669
−4.64167 6.01913	14.金属製品	−0.05723	−0.07807	0.130367	0.008276
−2.46667 5.66253	15.機械	0.003168	−0.00343	0.062513	0.054955
−0.08333 6.774395	16.電気機器	0.054146	0.062523	−0.02124	0.236551
−0.48333 5.738044	17.輸送用機器	0.063323	0.071961	−0.01442	0.107439
−1.99167 7.060834	18.精密機器	0.011565	0.009706	0.028296	0.010624
0.1 5.883772	19.その他製品	0.077076	0.089504	−0.03478	0.020312
−0.96667 2.246344	20.電気・ガス	0.317391	0.349807	0.025651	0.030562
−0.1 3.746028	21.陸運業	0.175892	0.202988	−0.06798	0.039238
−3.78333 9.329312	22.海運業	−0.01396	−0.02017	0.04194	0.006057
−4.35833 6.487955	23.空運業	−0.04253	−0.05878	0.103793	0.021854
−3.7 7.592341	24.倉庫 ・運輸関連	−0.01963	−0.02865	0.061518	0.00563
−0.175 7.220315	25.通信業	0.045906	0.05284	−0.0165	0.006247
−3.225 6.758984	26.卸売業	−0.01438	−0.02315	0.064626	0.036212
−1.25 4.790995	27.小売業	0.057431	0.061471	0.021069	0.009925
−3.225 9.110745	28.銀行業	−0.00791	−0.01274	0.035568	0.036341
−3.56667 5.840351	29.証券業	−0.02927	−0.04353	0.099076	0.023978
0.733333 7.693602	30.保険業	0.055778	0.065721	−0.03371	0.016008
1.7 5.559594	31.その他 金融業	0.13809	0.164951	−0.10366	0.006527
−0.25 6.650837	32.不動産業	0.052409	0.060157	−0.01733	0.017676
0.05 5.043357	33.サービス業	0.102937	0.11936	−0.04487	0.006193

図1:業種別の最適ポートフォリオ

$(-e^{-\alpha C(t)}(\alpha=0.1,0.5,0.9)) < 1997$年 $>$

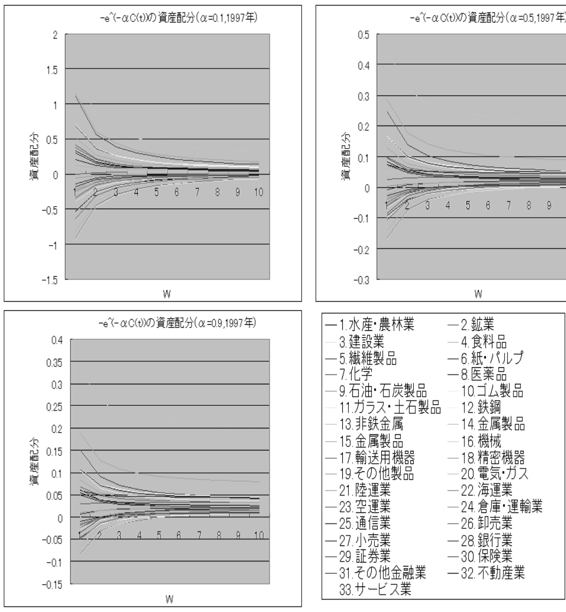

表 2: 時価総額の%とポートフォリオの差の絶対値の総和

効用関数	$\log C(t)$	$C(t)^{2\alpha}$ $(\alpha=0.1)$	$(\alpha=0.4)$	$(\alpha=0.6)$	$(\alpha=0.9)$
1995年	1.042902	1.086098	1.899787	2.368579	1.1675691
1996年	1.230884	1.406390	4.473229	4.807613	1.4583641
1997年	2.127926	2.483497	8.045715	7.743923	1.9413567
1998年	1.685161	1.896639	5.272699	4.389459	1.1848614
1999年	1.327595	1.628447	6.555365	7.977821	2.5641772
2000年	1.635807	1.862720	5.376713	4.045581	1.0082069
2001年	1.398781	1.556163	4.153549	3.915542	1.4057128
2002年	1.025912	1.167859	3.546277	3.496777	1.2560069
2003年	1.290766	1.535903	6.011362	7.056348	2.3296672
2004年	1.327570	1.494161	5.058406	5.168901	1.6876023
2005年	1.563891	1.940306	8.114511	9.108872	2.9587376

一證券などの破綻が続き，金融機関の株が売られていることから，モデルでは危険回避的な投資家はカラ売りするという結果となっている．

これらの結果より実際の経済状況とモデルによって得られた結果が類似していることがわかる．

図1より(II)指数効用関数のときは，αの値を大きくするほど最適ポートフォリオの式(一次関数の式)の傾きが小さくなっているので，その点からαの値を大きくすると危険回避的な傾向がグラフからわかる．

また，交点の富Wの値をαの値ごとで比べると，αが大きくなると交点の富Wの値が小さくなっていることがそれぞれの年ごとで比較した結果わかる．

表2より，1995年〜2005年の間において，各業種別時価総額の構成比と各効用関数でのポートフォリオの差の絶対値の総和を比較する．1995年，1996年，1999年，2001年〜2005年は差の絶対値の総和が効用関数$\log C(t)$で最小であり，1997年，1998年，2000年では効用関数$C(t)^{2\alpha}(\alpha=0.9)$で最小であることがわかる．

このことから1995年〜1996年と危険回避的であり1997年，1998年では危険愛好的に代わり1999年で危険回避的に戻り，再び2000年に危険愛好的になり，その後2001年〜2005年までは危険回避的になっているということができる．

この結果，あらゆる経済動向を反映した結果が得られたので，本論文の最適ポートフォリオは実際の株式の投資状況に類似する結果となったことがいえる．

6 おわりに

年ごとに経済状況が変わっていくが，モデルによる最適資産配分も変わっていくことがわかった．全体的に見るとモデルでの最適資産配分と実際の投資家の資産配分は非常に似ていることが多く，各年ごとの社会情勢なども反映した結果が得られたので, 本論文の目的の最適資産配分の実証的妥当性は証明できたのではないかと思う．

参考文献

[1] 加藤 龍治:「ポートフォリオ選択理論」，南山大学経営学部情報管理学科卒業論文,卒業論文要旨集(1998年).

[2] 澤木 勝茂 :「ファイナンスの数理」，朝倉書店(2002年).

[3] 資料「33業種株価指数・33業種騰落率」，野村證券株式会社(1995-2006年).